

5 Planimetria

Z regularnym podziałem płaszczyzny możemy mieć do czynienia w sytuacjach praktycznych, takich jak układanie kafelków lub bruku.
Bardzo ciekawe przykłady podziałów płaszczyzny znajdziemy w pracach holenderskiego malarza i grafika Mauritsa Cornelisa Eschera [czyt. eszera] (1898–1972). Inspirację matematyką widać w wielu jego pracach.

Multiteka

- Recytowanie cyfr liczby π
- Grecy i dowodzenie
- Problem mostów królewieckich
- Okręgi i katedra w Chartres
- Tadż Mahal – piękno symetrii
- Geometria euklidesowa

Uczeń:
- rozpoznaje kąty środkowe w okręgu,
- oblicza długość okręgu i długość łuku okręgu,
- określa wzajemne położenie dwóch okręgów, mając dane promienie tych okręgów oraz odległość między ich środkami,
- wykorzystuje styczność okręgów do rozwiązywania zadań.

5.1. Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r.

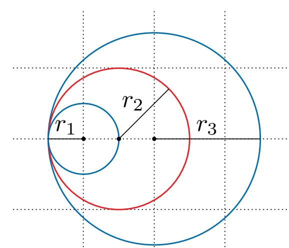
Stosunek długości okręgu do jego średnicy jest stały. Oznaczamy go grecką literą π. Oznaczenie to zostało wprowadzone przez brytyjskiego matematyka Williama Jonesa [czyt. łiliama dżonsa] w 1706 roku. Liczba π jest niewymierna, w obliczeniach często wykorzystujemy jej przybliżoną wartość: $\pi \approx 3{,}14$.

$$\frac{\text{długość okręgu}}{\text{średnica okręgu}} = \pi$$

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.

Przykład 1

Oblicz długości okręgów o promieniach: $r_1 = 0{,}5$ cm, $r_2 = 1$ cm, $r_3 = 1{,}5$ cm (rysunek obok).

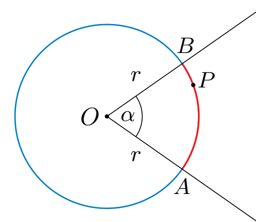


Długości okręgów wynoszą odpowiednio:

$$l_1 = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi \text{ [cm]}$$
$$l_2 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \text{ [cm]}$$
$$l_3 = 2\pi \cdot 1{,}5 = 3\pi \text{ [cm]}$$

Dowolne dwa punkty A, B należące do okręgu dzielą ten okrąg na dwa **łuki**. Jeśli nie są one półokręgami, to mówiąc „łuk AB", będziemy mieć na myśli krótszy z nich, chyba, że jest powiedziane inaczej. Łuk taki oznaczamy $\widehat{AB}$. Czasami, by uniknąć niejednoznaczności, stosujemy oznaczenie trzyliterowe, np. czerwony łuk na rysunku poniżej to łuk $\widehat{APB}$.

Kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu, nazywamy **kątem środkowym**.



Na rysunku obok ramiona kąta α przecinają okrąg w punktach A i B – kąt ten wyznacza łuk $\widehat{AB}$.

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem: $L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

Ćwiczenie 1

Jaką miarę ma kąt AOB, jeśli punkty A, B leżące na okręgu o środku O i promieniu $r = 12$ cm wyznaczają łuk długości 3π cm?

Ćwiczenie 1

$3\pi = \frac{\sphericalangle AOB}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12$

$\sphericalangle AOB = 45^\circ$

Multiteka
- Długość okręgu
- Wzajemne położenie okręgów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.1

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 2

W okręgu o średnicy 24 cm poprowadzono cztery promienie tak, że stosunek miary kątów pomiędzy kolejnymi promieniami wynosi $1:3:5:7$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez leżące na okręgu końce tych promieni.

Ćwiczenie 2

Długość okręgu: $l = 24\pi$ cm

Długości łuków:

$\frac{1}{16}l = \frac{3}{2}\pi$ cm

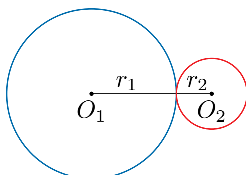
$\frac{3}{16}l = \frac{9}{2}\pi$ cm

$\frac{5}{16}l = \frac{15}{2}\pi$ cm

$\frac{7}{16}l = \frac{21}{2}\pi$ cm

Okręgi mające tylko jeden punkt wspólny (zwany **punktem styczności**) nazywamy **okręgami stycznymi**. Promienie okręgów stycznych poprowadzone do punktu styczności leżą na jednej prostej.

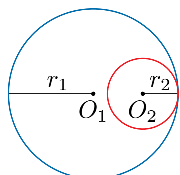
Okręgi styczne zewnętrznie



$|O_1O_2| = r_1 + r_2$

Odległość między środkami okręgów jest równa sumie ich promieni.

Okręgi styczne wewnętrznie

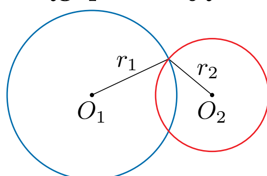


$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$

Jeśli $r_1 > r_2$, to odległość między środkami okręgów jest równa $r_1 - r_2$.

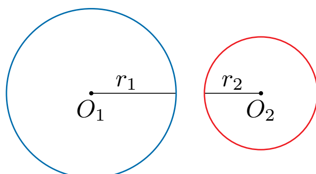
Dwa różne okręgi mogą też mieć dwa punkty wspólne (**okręgi przecinające się**) lub nie mieć punktów wspólnych (**okręgi rozłączne**).

Okręgi przecinające się



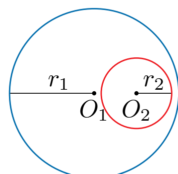
$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$

Okręgi rozłączne zewnętrznie



$|O_1O_2| > r_1 + r_2$

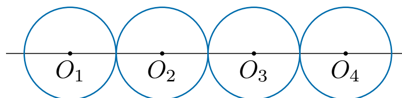
Okręgi rozłączne wewnętrznie



$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$

Ćwiczenie 3

Cztery okręgi o równych promieniach są odpowiednio styczne (rysunek obok), a ich środki leżą na jednej prostej. Oblicz średnicę tych okręgów, jeśli $|O_1O_4| = 48$.



Ćwiczenie 3

$6r = 48$, czyli $r = 8$

Zatem średnica: $2r = 16$

Zadania

1. Punkty A, B leżą na okręgu o średnicy 10 cm. Wiadomo, że $|AB| = 5$ cm. Oblicz długość łuku $\widehat{AB}$.

2. Oblicz długość łuku okręgu o średnicy 12 cm wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze $75°$.

3. Łuk okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze $20°$ ma długość 2π cm. Oblicz średnicę tego okręgu.

4. Oblicz miarę kąta środkowego wyznaczającego na okręgu o średnicy 18 cm łuk o długości 4π cm.

5. Wyznacz wartości x, dla których okrąg o środku w punkcie $P(x, 0)$ i promieniu $r_1 = 5$ oraz okrąg o środku w punkcie $Q(-1, 0)$ i promieniu $r_2 = 3$ są styczne: a) zewnętrznie, b) wewnętrznie.

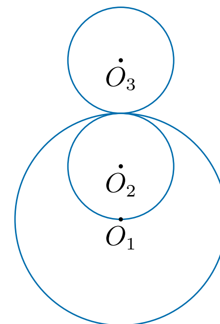
6. Narysuj w układzie współrzędnych okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2. Podaj odległość między środkami tych okręgów. Ile mają one punktów wspólnych?

a) $O_1(-2, 0)$, $r_1 = 4$, $O_2(-1, 0)$, $r_2 = 2$

b) $O_1(0, -2)$, $r_1 = 4$, $O_2(0, 3)$, $r_2 = 1$

c) $O_1(1, 3)$, $r_1 = 2$, $O_2(4, 3)$, $r_2 = 5$

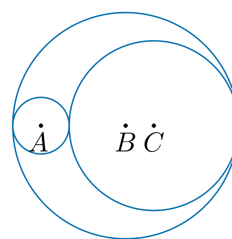
d) $O_1(2, -1)$, $r_1 = 2$, $O_2(-3, -1)$, $r_2 = 2\frac{1}{2}$



7. Punkty O_1, O_2 i O_3, będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Dwa mniejsze okręgi mają równe promienie. Oblicz średnicę każdego z tych okręgów, jeśli $|O_1O_3| = 18$.

8. Końce przekątnej prostokąta o bokach długości 4 cm i 8 cm są środkami dwóch okręgów stycznych zewnętrznie. Punkt styczności dzieli przekątną prostokąta w stosunku $1:3$. Oblicz długości tych okręgów.

9. Punkty A, B i C, będące środkami odpowiednio stycznych okręgów (rysunek obok), leżą na jednej prostej. Oblicz promień każdego z tych okręgów, jeśli $|AB| = 3$ i $|AC| = 4$.



10. Środki trzech okręgów parami stycznych zewnętrznie są wierzchołkami trójkąta o bokach 5, 6, 7. Oblicz promienie tych okręgów.

Odpowiedzi do zadań

1. Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 5 cm, czyli $\alpha = 60°$.
$L = \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{5}{3}\pi$ [cm]

2. $L = \frac{75°}{360°} \cdot 12\pi = \frac{5}{2}\pi$ [cm]

3. $2\pi = \frac{20°}{360°} \cdot 2\pi r$,
czyli $2r = 36$ cm

4. $4\pi = \frac{\alpha}{360°} \cdot 18\pi$, czyli $\alpha = 80°$

5. **a)** $x = -9$ lub $x = 7$
b) $x = -3$ lub $x = 1$

6. **a)** $|O_1O_2| = 1$; 0
b) $|O_1O_2| = 5$; 1
c) $|O_1O_2| = 3$; 1
d) $|O_1O_2| = 5$; 0

7. Niech r – promień okręgów O_2 i O_3, $2r$ – promień okręgu O_1.
$3r = 18$, czyli $r = 6$
$2r = 12$
Średnice okręgów: 12, 12, 24

8. Długość przekątnej prostokąta:
$d = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ [cm]
Długości promieni okręgów: $\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{5}$ cm
Długości okręgów: $2\sqrt{5}\pi$ cm, $6\sqrt{5}\pi$ cm

9. Niech r_A, r_B, r_C – promienie okręgów o środkach A, B, C.

$$\begin{cases} 2r_B = 2r_A + 2r_C \\ r_B - r_A = 3 \\ r_C + r_A = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_A = 1 \\ r_B = 4 \\ r_C = 3 \end{cases}$$

10. Niech r_1, r_2, r_3 – promienie okręgów.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 5 \\ r_1 + r_3 = 6 \\ r_2 + r_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \\ r_4 = 4 \end{cases}$$

5.2. Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

Zwróć uwagę, że punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Wzór na pole koła został udowodniony przez Archimedesa.

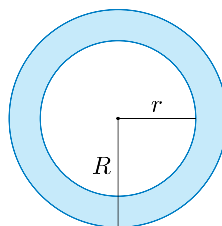
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

Ćwiczenie 1

a) Oblicz pole największego koła zawartego w kwadracie o polu 36 cm^2.

b) Oblicz długość okręgu ograniczającego koło o polu $2{,}25\pi$ cm^2.

Część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami) nazywamy **pierścieniem kołowym**.
Opisując pierścień kołowy, podajemy jego **promień zewnętrzny** i **promień wewnętrzny**. Różnicę tych promieni nazywamy **szerokością pierścienia**. Dla pierścienia na rysunku obok jest ona równa $R - r$.



Ćwiczenie 2

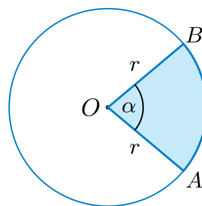
a) Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym 25 cm i promieniu wewnętrznym 24 cm. Podaj promień koła, którego pole jest równe polu tego pierścienia.

b) Pole pierścienia kołowego o szerokości 1 cm wynosi 17π cm^2. Oblicz promień zewnętrzny i promień wewnętrzny tego pierścienia.

Część koła o środku O (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\overset{\frown}{AB}$ i promieniami OA i OB nazywamy **wycinkiem koła** lub **wycinkiem kołowym**.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Ćwiczenie 3

Oblicz pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy α.

a) $r = 12,\ \ \alpha = 75^\circ$ b) $r = 2,\ \ \alpha = 22^\circ 30'$ c) $r = \sqrt{3},\ \ \alpha = 315^\circ$

Uczeń:
– oblicza pole figury, stosując wzór na pole koła i pole wycinka koła.

Ćwiczenie 1

a) Bok kwadratu: $a = 6$ cm
Promień koła: $r = 3$ cm
Pole koła: $P = 9\pi$ cm^2

b) Promień koła: $r = 1{,}5$ cm
Długość okręgu: $l = 3\pi$ cm

Ćwiczenie 2

a) Pole pierścienia:
$P = \pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 24^2 = 49\pi$ [cm^2]
Promień koła: $r = 7$ cm

b) Niech r – promień wewnętrzny pierścienia kołowego.
$\pi(r+1)^2 - \pi r^2 = 17\pi$
$r = 8$ cm
Promień wewnętrzny: 8 cm
Promień zewnętrzny: 9 cm

Ćwiczenie 3

a) $P = \frac{75^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 30\pi$

b) $P = \frac{22{,}5^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{4}$

c) $P = \frac{315^\circ}{360^\circ} \cdot \pi(\sqrt{3})^2 = \frac{21}{8}\pi$

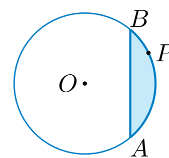
Multiteka
• Pole koła

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.2

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

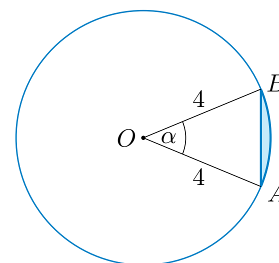
Pole wycinka koła o promieniu 6 wyznaczonego przez kąt α jest równe 2π. Oblicz miarę kąta α.



Część koła (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem $\widehat{APB}$ i cięciwą AB nazywamy **odcinkiem koła** lub **odcinkiem kołowym**.

Przykład 1

Oblicz pole odcinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez cięciwę AB i kąt AOB o mierze 45° (rysunek obok).



Obliczamy pole wycinka koła AOB:

$$P_1 = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = 2\pi$$

Następnie obliczamy pole trójkąta AOB:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$$

Zatem pole odcinka koła $P = P_1 - P_2 = 2\pi - 4\sqrt{2}$.

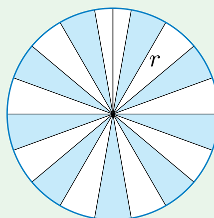
Ćwiczenie 5

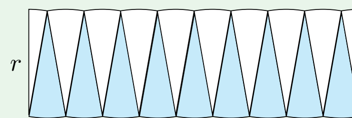
Punkty A, B należące do okręgu o środku O i promieniu 12 wyznaczają podany kąt AOB. Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez ten kąt.

a) $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ b) $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ c) $\sphericalangle AOB = 30^\circ$

Czy wiesz, że…

Do uzasadnienia wzoru na pole koła wykorzystuje się ustawienie wycinków koła w figurę taką jak na rysunku obok.

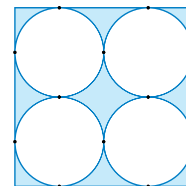




Dolna linia składająca się z łuków ma długość πr.

Zadania

D **1.** Bok kwadratu ma długość 6. Wykaż, że pole zacieniowanego obszaru jest mniejsze od 9 (rysunek obok).



2. Cięciwa łącząca punkty A i B leżące na okręgu o promieniu 5 ma długość $5\sqrt{3}$. Oblicz długości łuków wyznaczonych przez te punkty oraz pola odpowiednich wycinków.

3. W kole o środku O i promieniu 4 poprowadzono cięciwę AB. Oblicz pola figur, na które cięciwa podzieliła koło, jeśli pole $\triangle AOB$ jest równe $4\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4

$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 6^2 = 2\pi$, skąd $\alpha = 20^\circ$

Ćwiczenie 5

a) $P_1 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 36\pi$

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 90^\circ = 72$

$P = 36(\pi - 2)$

b) $P_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 24\pi$

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 60^\circ = 36\sqrt{3}$

$P = 12(2\pi - 3\sqrt{3})$

c) $P_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 12\pi$

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 30^\circ = 36$

$P = 12(\pi - 3)$

Odpowiedzi do zadań

1. Promień koła: $r = \frac{3}{2}$

Pole zacieniowanego obszaru jest różnicą pola kwadratu i czterech pól kół:

$P_Z = 6^2 - 4 \cdot \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$

$= 36 - 9\pi$

Wiemy, że $\pi > 3$, zatem:

$P_Z < 36 - 9 \cdot 3 = 9.$

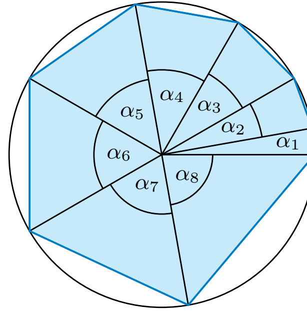
2. $d_1 = \frac{10}{3}\pi$, $d_2 = \frac{20}{3}\pi$,

$P_1 = \frac{25}{3}\pi$, $P_2 = \frac{50}{3}\pi$

3. $P_1 = 2\pi - 4\sqrt{2}$, $P_2 = 14\pi + 4\sqrt{2}$

D **4.** Uzasadnij, że pole odcinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 60° jest równe $\frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

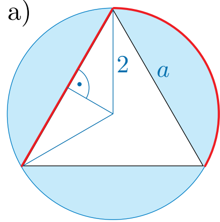
5. Wierzchołki ośmiokąta (rysunek obok) należą do okręgu o promieniu 3. Spośród kolejnych kątów środkowych: $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ każdy następny jest o 10° większy od poprzedniego.

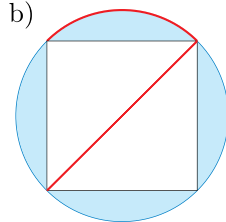


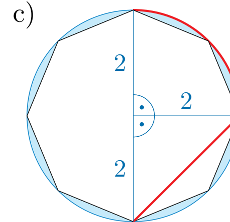
a) Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt α_8.

b) Oblicz sumę pól odcinków koła wyznaczonych przez kąty α_3 i α_6.

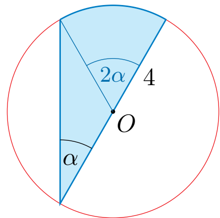
6. Dany jest wielokąt foremny, którego wierzchołki leżą na okręgu o promieniu 2. Oblicz długość czerwonej linii oraz pole zacieniowanego obszaru.

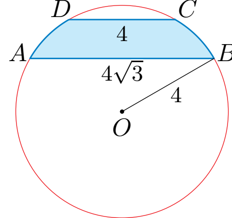
a)


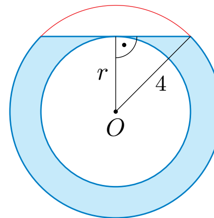
b)


c)


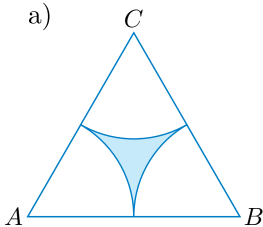
7. Oblicz pole zacieniowanej figury.

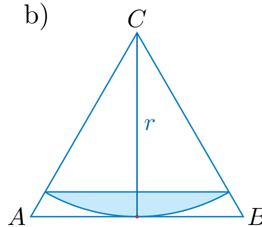
a) $\alpha = 30^\circ$


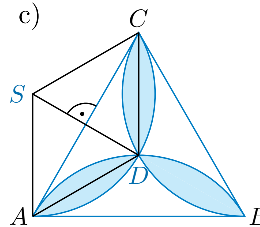
b) $AB \parallel CD$


c) $r = 2\sqrt{2}$


8. Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 6 cm. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

a)


b)


c)


4. $P = \frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot\pi r^2 - \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \sin 60^\circ =$
$= \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 =$
$= \frac{1}{12}r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$

5. $\alpha_1 + (\alpha_1 + 10^\circ) + \ldots +$
$+ (\alpha_1 + 70^\circ) = 360^\circ$

$\alpha_1 = 10^\circ$

a) $\alpha_8 = 80^\circ$

$P_8 = \frac{80^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3^2 = 2\pi$

b) $\alpha_3 = 30^\circ$, $\alpha_6 = 60^\circ$

Suma pól wycinków koła:

$P_W = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 9\pi = \frac{9}{4}\pi$

Suma pól trójkątów:

$P_T = \frac{1}{2} \cdot 9 \sin 30^\circ +$
$+ \frac{1}{2} \cdot 9 \sin 60^\circ = \frac{9}{4}(1 + \sqrt{3})$

Suma pól odcinków koła:

$P = P_W - P_T = \frac{9}{4}(\pi - 1 - \sqrt{3})$

6. a) $\frac{a}{2} = \sqrt{3}$, czyli $a = 2\sqrt{3}$

$l = 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\cdot 2\pi \cdot 2 = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

$P = \pi \cdot 2^2 - \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} =$
$= 4\pi - 3\sqrt{3}$

b) $l = 4 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 4 + \pi$

$P = \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 4(\pi - 2)$

c) $l = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 2 = 2\sqrt{2} + \pi$

$P = \pi \cdot 2^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 45^\circ =$
$= 4(\pi - 2\sqrt{2})$

7. a) $P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot$
$\cdot \sin 120^\circ = \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}$

b) $\sphericalangle AOB = 120^\circ$

$\sphericalangle COD = 60^\circ$

($\triangle COD$ jest równoboczny)

P_{AB}, P_{CD} – pola odcinków koła odciętych przez cięciwy AB i CD

$P_{AB} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot$
$\cdot \sin 120^\circ = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

$P_{CD} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot$
$\cdot \sin 60^\circ = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

$P = P_{AB} - P_{CD} = \frac{8}{3}\pi$

7. c) Pole pierścienia: $\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$
Pole odcinka koła: $\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 4\pi - 8$
Pole figury: $P = 8\pi - (4\pi - 8) = 4(\pi + 2)$

8. a) $P = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3^2 = 9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ [cm^2]

b) $r = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (3\sqrt{3})^2 - \frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$ [cm^2]

c) Zauważmy, że trójkąt ADS jest równoboczny i $|AD| = 2\sqrt{3}$ cm.

$P = 6 \cdot \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 - \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right) = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$ [cm^2]

Uczeń:

- określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość środka okręgu od prostej z promieniem okręgu, określa liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu,
- stosuje własności stycznej do okręgu do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Rozważmy odcinki PQ, PA, PB oraz trójkąty prostokątne PQA i PQB. Najkrótszym z wymienionych odcinków jest odcinek PQ, bo w trójkącie prostokątnym przyprostokątna jest zawsze krótsza od przeciwprostokątnej.

Komentarz

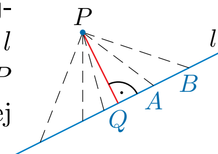
W uzasadnieniu do ćwiczenia 1 korzystamy z faktu (bez konieczności jego dowodzenia), że w dowolnym trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest dłuższa od każdej z jego przyprostokątnych. Po omówieniu twierdzenia i dowodu na str. 270 można powrócić do omawianego ćwiczenia i przeprowadzić dowód powyższego faktu.

5.3. Wzajemne położenie okręgu i prostej

D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że najkrótszy odcinek łączący dany punkt P z punktem leżącym na prostej l, gdzie $P \notin l$, jest do tej prostej prostopadły.

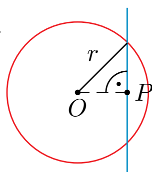
Odległością punktu P **od prostej** l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l, to przyjmujemy, że jego odległość od tej prostej jest równa zero.



Okrąg i prosta mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.

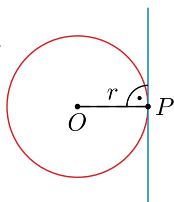
Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej.

$|OP| < r$



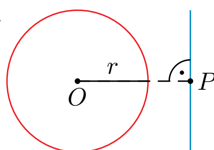
Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy jego **sieczną**. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

$|OP| = r$



Jeśli prosta ma z okręgiem jeden punkt wspólny, to mówimy, że jest **styczna** do okręgu (wspólny punkt nazywamy **punktem styczności**). Promień okręgu prowadzony do punktu styczności z prostą jest do niej prostopadły. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

$|OP| > r$



Na rysunku obok okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Ćwiczenie 2

a) Prosta l jest styczna do okręgu o promieniu 6 cm w punkcie P. Punkt A leży na prostej l i $|PA| = 4$ cm. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.

b) Prosta AB jest styczna do okręgu o środku w punkcie O. Punkt styczności P jest środkiem odcinka AB. Oblicz promień okręgu, jeśli $|AO| = 20$ cm i $|AB| = 32$ cm.

Ćwiczenie 2

a) $|AO| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ [cm]

b) $|OP| = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ [cm]

Multiteka
- Prosta i okrąg

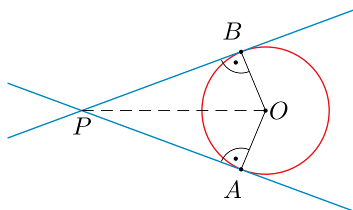
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.3

Generator testów i sprawdzianów

Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeśli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to:

$$|PA| = |PB|$$

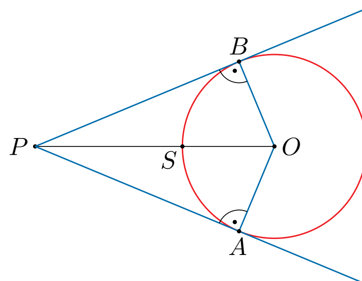


Dowód powyższego twierdzenia wynika z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów PAO i PBO.

Ćwiczenie 3

a) Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 6 cm. Z punktu P odległego od punktu O o 10 cm poprowadzono dwie proste styczne do okręgu w punktach A i B. Oblicz obwód czworokąta $PAOB$.

b) Obwód czworokąta $PAOB$ (rysunek obok) jest równy 34 cm. Oblicz promień okręgu, jeśli wiadomo, że odcinek PS ma długość 8 cm.



Ćwiczenie 3

a) $|PA| = |PB| = \sqrt{10^2 - 6^2} =$
$= 8$ [cm]

$Ob = 28$ cm

b) Niech r – promień okręgu.

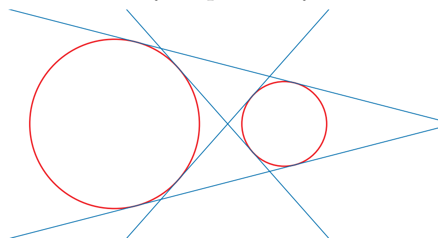
$|PA| = |PB| = 17 - r$

$(17 - r)^2 + r^2 = (8 + r)^2$

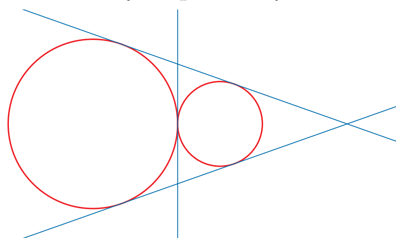
$r = 5$ cm

Liczba wspólnych stycznych dwóch okręgów zależy od położenia tych okręgów.

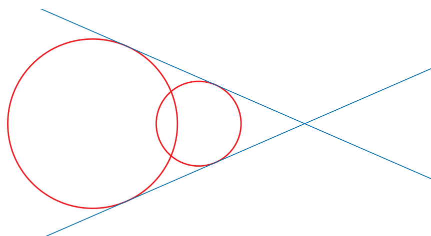
Okręgi rozłączne zewnętrznie
cztery wspólne styczne



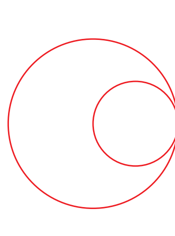
Okręgi styczne zewnętrznie
trzy wspólne styczne



Okręgi przecinające się
dwie wspólne styczne



Okręgi styczne wewnętrznie
jedna wspólna styczna



Okręgi rozłączne wewnętrznie nie mają wspólnych stycznych.

Ćwiczenie 4

Dany jest okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 oraz okrąg o środku O_2 i promieniu r_2. Określ liczbę wspólnych stycznych tych okręgów.

a) $r_1 = 3\frac{1}{2},\ \ r_2 = 4\frac{1}{2},\ \ |O_1O_2| = 5\frac{1}{2}$

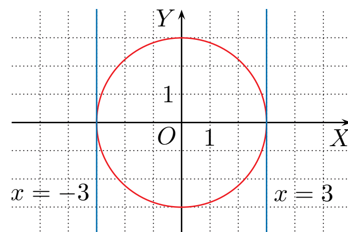
b) $r_1 = 11,\ \ r_2 = 13,\ \ |O_1O_2| = 24$

c) $r_1 = \frac{1}{3},\ \ r_2 = \frac{1}{2},\ \ |O_1O_2| = \frac{1}{6}$

d) $r_1 = \sqrt{2},\ \ r_2 = \sqrt{3},\ \ |O_1O_2| = 4$

Przykład 1

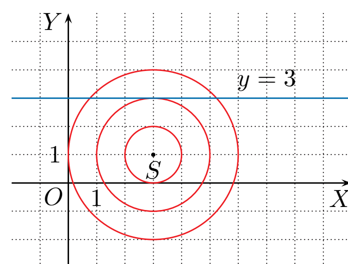
Dany jest okrąg o środku $O(0,0)$ i promieniu 3. Ile punktów wspólnych z okręgiem ma prosta $x = m$ w zależności od parametru m?



Prosta $x = m$ z danym okręgiem:
- ma jeden punkt wspólny dla $m \in \{-3, 3\}$,
- ma dwa punkty wspólne dla $m \in (-3; 3)$,
- nie ma punktów wpólnych dla $m \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

Przykład 2

Ile punktów wspólnych ma prosta $y = 3$ z okręgiem o środku $S(3, 1)$ w zależności od promienia r tego okręgu?



Prosta $y = 3$ z okręgiem o środku S:
- ma jeden punkt wspólny dla $r = 2$,
- ma dwa punkty wspólne dla $r \in (2; \infty)$,
- nie ma punktów wspólnych dla $r \in (0; 2)$.

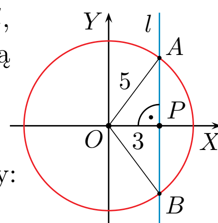
Ćwiczenie 5

Ile punktów wspólnych ma prosta k z okręgiem o środku S w zależności od promienia r tego okręgu?

a) $k\colon y = 3,\ S(3, -1)$ b) $k\colon x = -1,\ S\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ c) $k\colon x = \sqrt{2},\ S(-1, 1)$

Przykład 3

Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej $l\colon x = 3$ i okręgu o środku $O(0,0)$ i promieniu 5.



Niech $|OP|$ będzie odległością środka okręgu od prostej l, a punkty A, B niech będą punktami przecięcia okręgu z tą prostą. Wówczas $|OP| = 3$, zatem:

$$|AP| = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Trójkąty OPA i OPB są przystające, więc długość cięciwy:

$$|AB| = 2 \cdot |AP| = 8$$

Ćwiczenie 4

a) Okręgi przecinające się – 2 wspólne styczne

b) Okręgi styczne zewnętrznie – 3 wspólne styczne

c) Okręgi styczne wewnętrznie – 1 wspólna styczna

d) Okręgi rozłączne zewnętrznie – 4 wspólne styczne

Ćwiczenie 5

a) 0 punktów dla $r \in (0; 4)$, 1 punkt dla $r = 4$, 2 punkty dla $r \in (4; \infty)$

b) 0 punktów dla $r \in (0; \frac{1}{2})$, 1 punkt dla $r = \frac{1}{2}$, 2 punkty dla $r \in (\frac{1}{2}; \infty)$

c) 0 punktów dla $r \in (0; 1 + \sqrt{2})$, 1 punkt dla $r = 1 + \sqrt{2}$, 2 punkty dla $r \in (1 + \sqrt{2}; \infty)$

Ćwiczenie 6

a) Oblicz długość cięciwy wyznaczonej przez punkty przecięcia prostej $y = -3$ i okręgu o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu 4.

b) Cięciwa długości 6 jest wyznaczona przez punkty przecięcia prostej $x = 1$ i okręgu o środku w punkcie $(-3, 2)$. Oblicz promień tego okręgu.

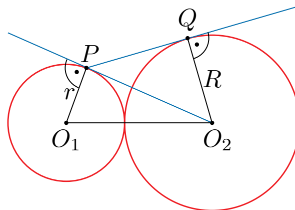
Zadania

1. Prosta równoległa do osi OY przecina okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 10 w punktach A i B. Wyznacz równanie tej prostej, jeśli:

a) $|AB| = 12$, b) $|AB| = 10\sqrt{2}$, c) $|AB| = 10$, d) $|AB| = 20$.

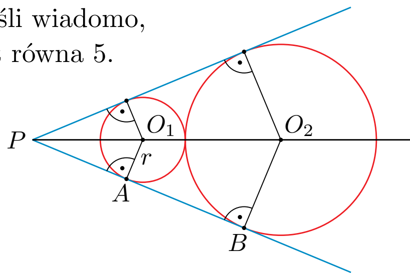
2. Odległość między dwiema prostymi równoległymi to długość odcinka prostopadłego do tych prostych o końcach należących do prostych. Oblicz promień okręgu stycznego do dwóch prostych równoległych, jeśli wiadomo, że odległość między nimi jest równa 5 cm.

3. Okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach r i R są styczne zewnętrznie (rysunek obok). Prosta PO_2 jest styczna do okręgu o środku O_1, a prosta PQ – do okręgu o środku O_2. Wyznacz obwód czworokąta PO_1O_2Q.



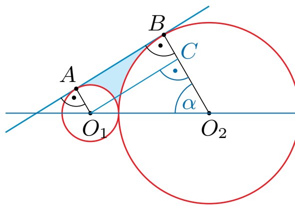
4. Dany jest okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 11. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do osi OX i ma długość 20. Wyznacz współrzędne punktu P należącego do tej cięciwy, jeśli wiadomo, że jego odległość od środka okręgu jest równa 5.

5. Z punktu P poprowadzono wspólne styczne okręgów o środkach w punktach O_1 i O_2 (rysunek obok). Oblicz promień r okręgu o środku w punkcie O_1, jeśli $|O_2B| = 5$ i $|O_2P| = 13$.



6. Punkty A i B leżą na okręgu o średnicy 12 cm, a odległość między nimi jest równa promieniowi tego okręgu. Styczne do okręgu poprowadzone w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Oblicz pole trójkąta APB.

7. Dane są okręgi o środkach O_1 i O_2 i promieniach $|O_1A| = 4$ cm i $|O_2B| = 12$ cm (rysunek obok). Prosta AB jest wspólną styczną tych okręgów. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



Ćwiczenie 6

a) $2\sqrt{7}$ **b)** 5

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -8$ lub $x = 8$
b) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$
c) $x = -5\sqrt{3}$ lub $x = 5\sqrt{3}$
d) $x = 0$

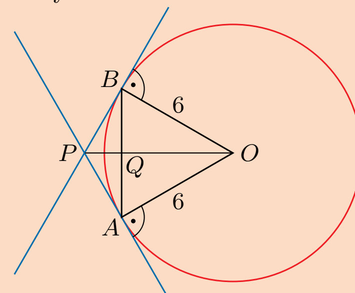
2. $r = 2{,}5$ cm

3. $|O_1O_2| = r + R$
$|PO_2| = \sqrt{(r+R)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2rR}$
$|PQ| = \sqrt{R^2 + 2rR - R^2} = \sqrt{2rR}$
$Ob = 2r + 2R + \sqrt{2rR}$

4. $P(-2, -\sqrt{21})$ lub $P(-2, \sqrt{21})$ lub $P(2, -\sqrt{21})$ lub $P(2, \sqrt{21})$

5. Zauważmy, że $\triangle PAO_1 \sim \triangle PBO_2$, stąd:
$\frac{|O_1P|}{r} = \frac{|O_2P|}{|O_2B|}$
$\frac{13-5-r}{r} = \frac{13}{5}$
$r = \frac{20}{9}$

6. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt ABO jest równoboczny, czyli $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ i $\sphericalangle AOP = \sphericalangle POB = 30^\circ$.
Zatem $|PO| = 4\sqrt{3}$ cm.
$|PQ| = |PO| - |QO| = 4\sqrt{3} - \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ [cm]
$P_{APB} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ [cm^2]

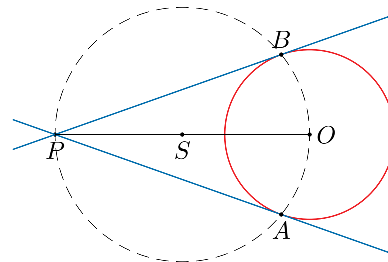
7. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
$|O_1O_2| = 16$ cm
$|CO_2| = 12 - 4 = 8$ cm
$|CO_1| = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}$ [cm]
$\sin\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $\alpha = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle AO_1O_2 = 120^\circ$
Pole zacieniowanego obszaru: $P = P_T - P_1 - P_2$, gdzie:
P_T – pole trapezu ABO_2O_1
P_1 – pole wycinka koła o promieniu 4 cm i kącie 120°
P_2 – pole wycinka koła o promieniu 12 cm i kącie 60°
$P = 64\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi - 24\pi = \left(64\sqrt{3} - \frac{80}{3}\pi\right)$ [cm^2]

Warto wiedzieć

Konstrukcja stycznej do okręgu

Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O, przechodzącą przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu, postępujemy w następujący sposób.

- Wyznaczamy środek odcinka OP – punkt S na rysunku poniżej.
- Rysujemy okrąg, którego promieniem jest odcinek SO – okrąg ten przecina dany okrąg w punktach A i B.
- Prosta PA jest styczna do danego okręgu. Zauważ, że $PA \perp OA$ (aby to uzasadnić, można rozpatrzyć kąty trójkątów równoramiennych PSA i OSA). Drugą styczną jest prosta PB.

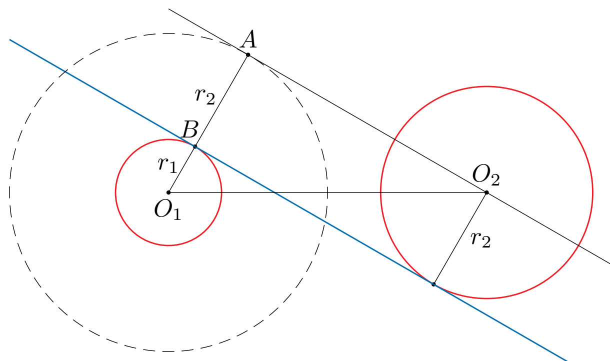


1. Opisz konstrukcję stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt należący do tego okręgu.

Konstrukcja wspólnej stycznej do dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie

Rozpatrzmy okrąg L_1 o środku O_1 i promieniu r_1 oraz rozłączny z nim zewnętrznie okrąg L_2 o środku O_2 i promieniu r_2 (rysunek poniżej).

- Rysujemy okrąg L_3 o środku w punkcie O_1 i promieniu równym $r_1 + r_2$.



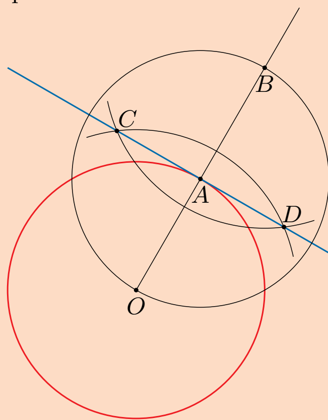
- Rysujemy prostą O_2A – styczną do okręgu L_3 przechodzącą przez punkt O_2.
- Wyznaczamy punkt B – punkt przecięcia odcinka O_1A z okręgiem L_1.
- Rysujemy styczną do okręgu L_1 przechodzącą przez punkt B. Jest ona równocześnie styczną do okręgu L_2 (uzasadnij).

***2.** Opisz, jak skonstruować pozostałe wspólne styczne dwóch okręgów rozłącznych zewnętrznie.

Odpowiedzi do zadań

1. Aby skonstruować styczną do danego okręgu o środku O, przechodzącą przez punkt A leżący na okręgu, postępujemy w następujący sposób.

- Rysujemy półprostą OA.
- Rysujemy okrąg o środku A i promieniu $|OA|$ – okrąg ten przecina półprostą OA w punktach O i B.
- Z punktów O i B rysujemy przecinające się łuki okręgów o tym samym promieniu (dłuższym niż promień $|OA|$). Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez C i D.
- Rysujemy prostą CD – jest ona styczna do danego okręgu i przechodzi przez punkt A.

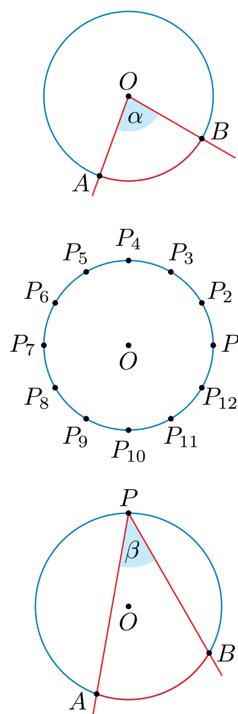


2. Analogicznie konstruujemy drugą styczną, która przechodzi przez punkt D. Aby skonstruować pozostałe styczne do danych okręgów, rysujemy najpierw okrąg L_3 o środku w punkcie O_2 i promieniu równym $r_2 - r_1$.

- Rysujemy proste O_1E i O_1G – styczne do okręgu L_3 przechodzące przez punkt O_1.
- Wyznaczamy punkty F i H – punkty przecięcia prostych O_2E i O_2G z okręgiem L_2.
- Rysujemy styczną do okręgu L_2 przechodzącą przez punkt F oraz styczną do okręgu L_2 przechodzącą przez punkt H. Proste te są również styczne do okręgu L_1.

5.4. Kąty w okręgu

Kąt środkowy α przedstawiony na rysunku obok jest wyznaczony przez zaznaczony kolorem czerwonym łuk $\widehat{AB}$.
Mówimy też, że kąt środkowy α jest oparty na łuku $\widehat{AB}$ lub na cięciwie AB.



Ćwiczenie 1

Punkty: $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ dzielą okrąg na 12 łuków o równej długości. Podaj miarę kąta środkowego opartego na łuku:

a) $\widehat{P_1P_2P_3}$, b) $\widehat{P_4P_7P_{12}}$, c) $\widehat{P_6P_1P_7}$.

Definicja

> **Kąt wpisany** w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego okręgu.

O kącie wpisanym β (rysunek obok) mówimy, że jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.

Twierdzenie

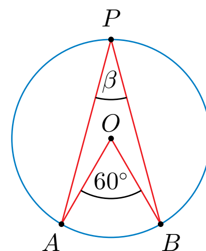
> Kąt środkowy w okręgu ma miarę dwa razy większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Dowód – patrz ćwiczenie 4. na następnej stronie.

Ćwiczenie 2

a) Podaj miarę kąta β (rysunek obok).

b) Narysuj w dowolnym okręgu kąt środkowy $\alpha = 120^\circ$ i trzy różne kąty wpisane oparte na tym samym łuku co kąt α. Podaj miarę tych kątów.



Ćwiczenie 3

Kąt wpisany β jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy α. Wyznacz miarę kąta $\alpha + \beta$, jeśli:

a) $\alpha = 110^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$, c) $\beta = 17^\circ$, d) $\beta = 105^\circ$.

Uczeń:
- rozpoznaje kąty wpisane w okrąg oraz wskazuje łuki, na których są one oparte,
- stosuje twierdzenie o kątach środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku oraz wnioski z tego twierdzenia i twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu,
- formułuje twierdzenie dotyczące kątów środkowego i wpisanego w okrąg oraz dowodzi jego prawdziwości,
- stosuje twierdzenie o cięciwach do wyznaczania długości odcinków w okręgach,
- przeprowadza dowód twierdzenia o cięciwach.

Ćwiczenie 1

$\frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 30^\circ$

a) $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

b) $8 \cdot 30^\circ = 240^\circ$

c) $11 \cdot 30^\circ = 330^\circ$

Ćwiczenie 2

a) 30°

b) 60°

Ćwiczenie 3

a) $\alpha + \beta = 110^\circ + 55^\circ = 165^\circ$

b) $\alpha + \beta = 45^\circ + 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$

c) $\alpha + \beta = 34^\circ + 17^\circ = 51^\circ$

d) $\alpha + \beta = 210^\circ + 105^\circ = 315^\circ$

Multiteka
- Kąty w okręgu

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.4

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 4

Dowód przypadku II

Trójkąt BOP jest równoramienny, zatem:
$\sphericalangle BOP = 180^\circ - 2\beta$
$\alpha = 180^\circ - \sphericalangle BOP =$
$= 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta$

Dowód przypadku III

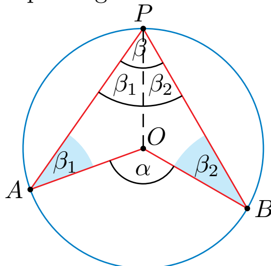
Na podstawie II mamy:
$$\alpha_1 = 2\beta_1$$
oraz
$$\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$$
Zatem:
$\alpha = 2\beta + 2\beta_1 - \alpha_1 =$
$= 2\beta + 2\beta_1 - 2\beta_1 = 2\beta$

D **Ćwiczenie 4**

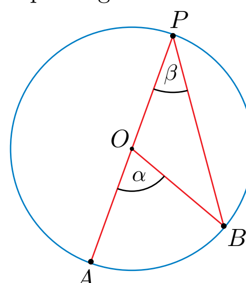
Przeczytaj informację w ramce oraz dowód przypadku I, a następnie przeprowadź dowody przypadków II i III.

Aby udowodnić, że kąt środkowy α w okręgu jest dwukrotnie większy od kąta wpisanego β opartego na tym samym łuku, wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki.

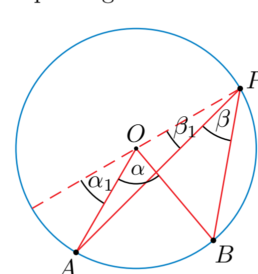
I. Środek okręgu O leży wewnątrz kąta wpisanego.



II. Środek okręgu O leży na ramieniu kąta wpisanego.



III. Środek okręgu O leży na zewnątrz kąta wpisanego.



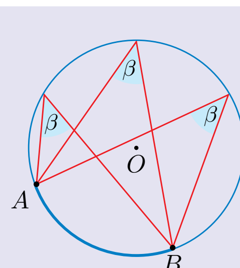
Dowód przypadku I

Z punktu P prowadzimy promień PO. Wówczas $\beta = \beta_1 + \beta_2$.
Wyznaczamy miarę kąta środkowego:
$$\alpha = 360^\circ - (180^\circ - 2\beta_1) - (180^\circ - 2\beta_2) = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$$

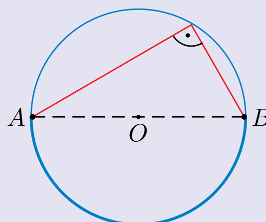
Wskazówka do przypadku III. Rozważ kąty $\alpha + \alpha_1$ i $\beta + \beta_1$.

Poniższe wnioski wynikają z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym.

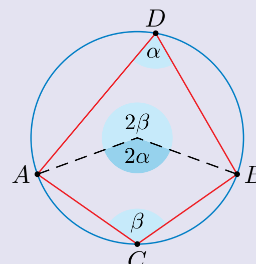
Twierdzenie



Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Suma miar kątów α i β wpisanych w okrąg, jak na rysunku powyżej, jest równa 180°.

D **Ćwiczenie 5**

Uzasadnij każdy ze sformułowanych powyżej wniosków.

Ćwiczenie 5

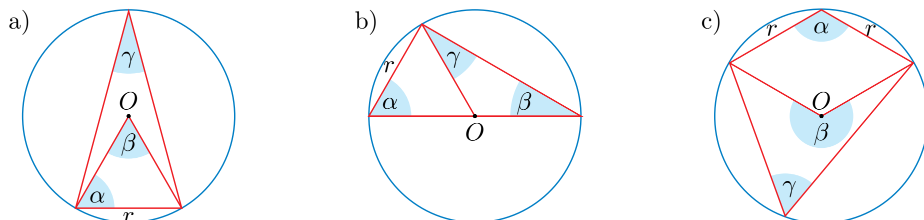
1) Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku odpowiadają temu samemu kątowi środkowemu opartemu na tym łuku, zatem wszystkie są równe.

2) Kąt środkowy oparty na półokręgu jest kątem półpełnym, czyli równym 180°, zatem kąt wpisany w okrąg i oparty na półokręgu jest o połowę mniejszy, czyli równy 90°.

3) $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, zatem $\alpha + \beta = 180^\circ$

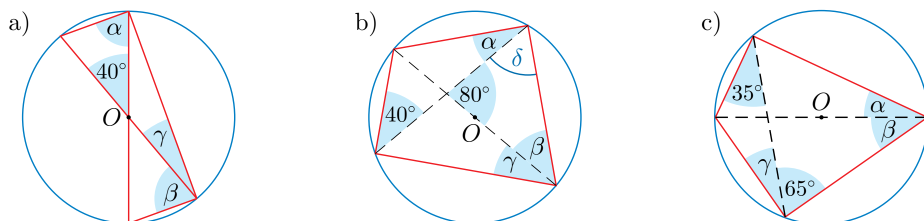
Ćwiczenie 6

Promień okręgu jest równy r. Wyznacz miary kątów: α, β i γ.



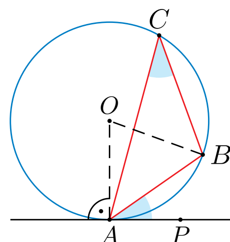
Ćwiczenie 7

Wyznacz miary kątów: α, β i γ.



Kąt między styczną a cięciwą okręgu

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (kąt dopisany do okręgu) ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.



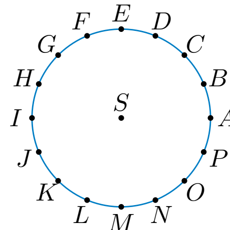
D **Ćwiczenie 8**

Uzasadnij powyższe twierdzenie.

Zadania

1. Punkty: $A, B, C, \ldots, P$ dzielą okrąg na 16 łuków o równej długości. Punkt A leży na jednym z ramion kąta środkowego β. Który z punktów leży na drugim ramieniu tego kąta?

a) $\beta = 45°$
b) $\beta = 112{,}5°$
c) $\beta = 225°$
d) $\beta = 315°$



2. Dany jest okrąg o promieniu 6. Podaj miarę kąta wpisanego opartego na łuku tego okręgu, jeśli łuk ten ma długość: a) 2π, b) 3π, c) $\frac{15}{2}\pi$, d) $\frac{\pi}{4}$.

Ćwiczenie 6

a) $\alpha = \beta = 60°$ (kąty w trójkącie równobocznym)
$\gamma = \frac{1}{2}\beta = 30°$ (kąty wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku)
b) $\alpha = 60°$ (kąt w trójkącie równobocznym)
$\beta = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ (kąty wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku)
$\gamma = \beta = 30°$ (kąty w trójkącie równoramiennym)
c) $\alpha = 2 \cdot 60° = 120°$
$\beta = 2 \cdot 120° = 240°$ (kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku)
$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60° = 60°$ (kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku)

Ćwiczenie 7

a) $\alpha = \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$
$\beta = \alpha = 70°$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)
$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 40° = 20°$ (kąty wpisany i środkowy oparte na tym samym łuku)
b) $\beta = 40°$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)
$\delta = 180° - (80° + \beta) = 60°$
$\alpha + \delta = 90°$ (kąt wpisany oparty na półokręgu)
$\alpha = 30°$
$\gamma = \alpha = 30°$ (kąty wpisane oparte na tym samym łuku)
c) $\beta = 35°$
$\gamma = 90° - 65° = 25°$
$\alpha = \gamma = 25°$

Ćwiczenie 8

$\sphericalangle BAP = 90° - \sphericalangle OAB =$
$= 90° - \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AOB) =$
$= \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$

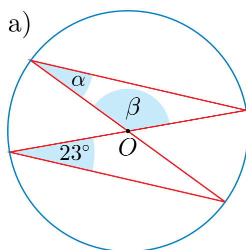
Odpowiedzi do zadań

1. a) C lub O
b) F lub L
c) G lub K
d) C lub O

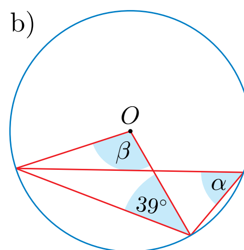
2. a) 30°
b) 45°
c) 112,5°
d) 3,75°

3. Wyznacz miary kątów α i β.

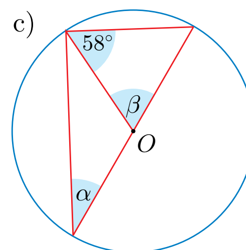
a)



b)



c)



3. a) $\alpha = 23°$, $\beta = 134°$
b) $\alpha = 51°$, $\beta = 102°$
c) $\alpha = 32°$, $\beta = 64°$

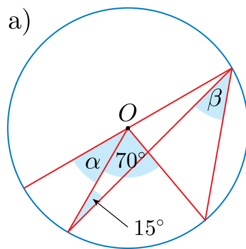
4. Kąt β jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na tym samym łuku co kąt środkowy α. Wyznacz miary kątów α i β.

a) $\alpha + \beta = 111°$ b) $\alpha = \beta + 56°30'$ c) $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 48°$

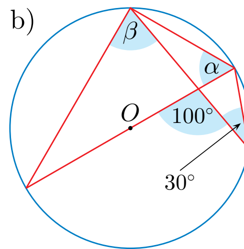
4. a) $\alpha = 74°$, $\beta = 37°$
b) $\alpha = 113°$, $\beta = 56°30'$
c) $\alpha = 72°$, $\beta = 36°$

5. Wyznacz miary kątów α i β.

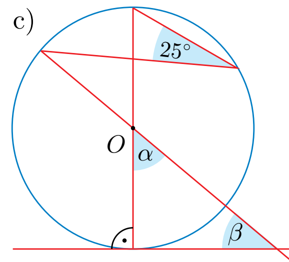
a)



b)



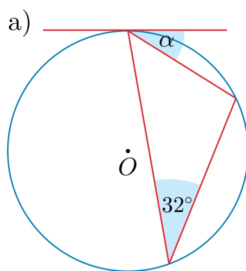
c)



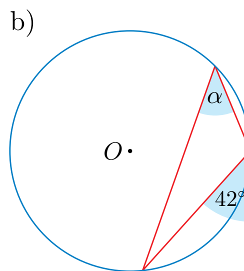
5. a) $\alpha = 30°$, $\beta = 35°$
b) $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$
c) $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$

6. Wyznacz miarę kąta α.

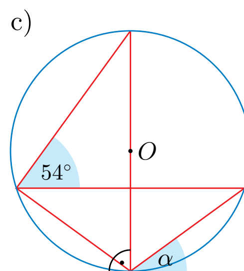
a)



b)



c)



6. a) $\alpha = 32°$
b) $\alpha = 42°$
c) $\alpha = 36°$

7. a) W okręgu o środku O poprowadzono cięciwę AB. Jeden z kątów trójkąta AOB ma miarę $96°$. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie A.

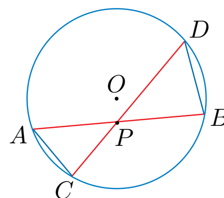
b) W okręgu o promieniu 6 cm poprowadzono cięciwę AB. Długość łuku $\widehat{AB}$ jest równa π cm. Wyznacz miarę kąta zawartego między cięciwą AB a styczną do okręgu poprowadzoną w punkcie B.

7. a) Niech α – szukany kąt.
$\alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 96° = 48°$
b) Niech α – szukany kąt.
$\sphericalangle AOB = \frac{\pi}{2\pi \cdot 6} \cdot 360° = 30°$
$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 30° = 15°$

D **8.** Udowodnij poniższe twierdzenie.

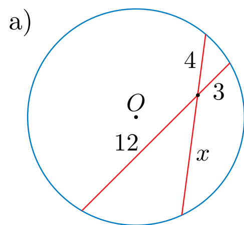
Twierdzenie

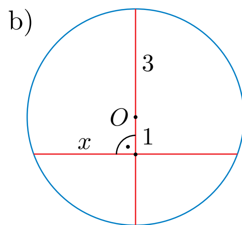
> Jeśli w okręgu dwie cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie P, to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

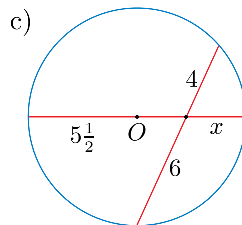


Wskazówka. Uzasadnij, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

9. Oblicz x.

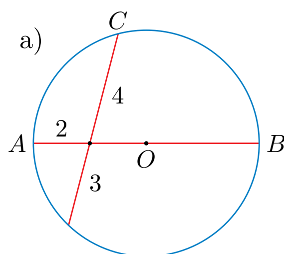
a)


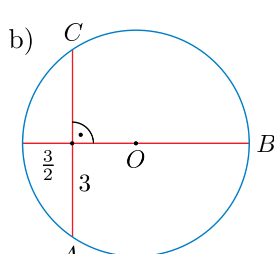
b)


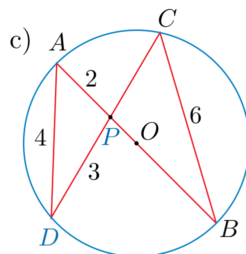
c)


10. Dany jest okrąg o promieniu 11 cm. Przez punkt P, odległy od środka okręgu o 5 cm, poprowadzono cięciwę o długości 20 cm. Oblicz długości odcinków, na które punkt P dzieli cięciwę.

11. Oblicz promień okręgu oraz pole trójkąta ABC.

a)


b)


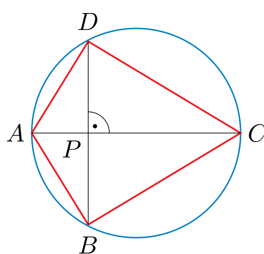
c)


12. Dany jest okrąg o promieniu 8. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $4\sqrt{7}$ i przecina średnicę PQ pod kątem prostym.

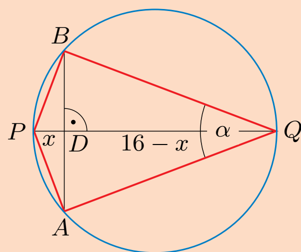
a) Oblicz długości odcinków, na które cięciwa AB dzieli średnicę PQ.

b) Wyznacz sinus kąta ostrego czworokąta $APBQ$ i podaj przybliżoną miarę tego kąta.

13. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu o promieniu $6\frac{1}{2}$ (rysunek obok). Wiadomo, że $|PA| = 4$ oraz $|PB| = |PD|$. Oblicz obwód tego czworokąta.



12. $|AD| = |BD| = 2\sqrt{7}$



a) Niech $x = |PD| < |QD| = 16 - x$, czyli $x < 8$.

$$(2\sqrt{7})^2 = x(16 - x)$$
$$x = 2$$

Zatem szukane długości odcinków to 2 i 14.

b) $|BQ|^2 = (2\sqrt{7})^2 + 14^2$, czyli $|BQ| = 4\sqrt{14}$

$P_{AQB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |QD| = 28\sqrt{7}$

$P_{AQB} = \frac{1}{2} \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot \sin\alpha = 112 \sin\alpha$

$\sin\alpha - \frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}6614$

$\alpha \approx 41^\circ$

8. Zauważmy, że:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$$

oraz

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB$$

(kąty wpisane oparte na tym samym łuku).
Zatem z cechy KKK trójkąty APC i DPB są podobne. Stąd:

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$$

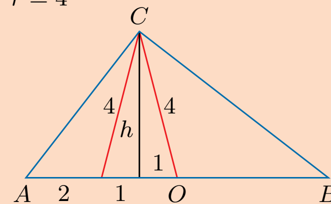
czyli:

$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$

9. **a)** $x = 9$
b) $x = 2\sqrt{2}$
c) $x = 3$

10. 8 cm, 12 cm

11. **a)** $2(2r - 2) = 12$
$r = 4$



$h^2 + 1^2 = 4^2$
$h = \sqrt{15}$
$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \left(2r - \frac{3}{2}\right) = 9$
$r = \frac{15}{4}$
$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(2 \cdot \frac{15}{4} - \frac{3}{2}\right) = 18$

c) Zauważmy, że:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$$

oraz

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$$

(kąty wpisane oparte na tym samym łuku).
Na podstawie cechy KKK trójkąty APD i CPB są podobne. Stąd:

$$\frac{2}{|PC|} = \frac{4}{6}$$

czyli $|PC| = 3$.
Z twierdzenia o cięciwach: $2(2r - 2) = 9$, czyli $r = \frac{13}{4}$.
$\sphericalangle ACB = 90^\circ$, więc z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC| = \sqrt{\left(6\frac{1}{2}\right)^2 - 6^2} = \frac{5}{2}$$

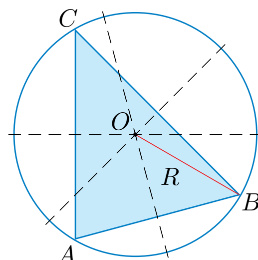
Zatem $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 6 = \frac{15}{2}$.

13. $10\sqrt{13}$

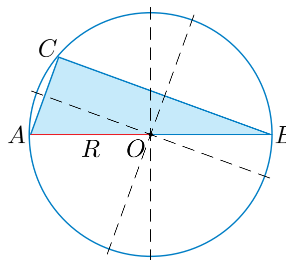
5.5. Okrąg opisany na trójkącie

Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest wpisany w okrąg. Na każdym trójkącie można opisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

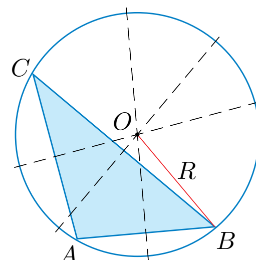
> Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



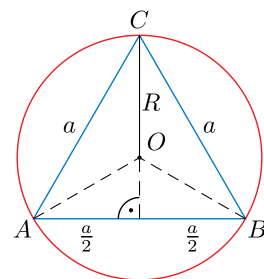
Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży na zewnątrz tego trójkąta.

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta od jego wierzchołków.

> Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a wyraża się wzorem:
> $$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



D **Ćwiczenie 2**

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Mówimy, że koło jest opisane na trójkącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równobocznym o polu $64\sqrt{3}$ cm^2.
b) Oblicz wysokość oraz pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu 6 cm.

Uczeń:
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na trójkącie równobocznym lub prostokątnym,
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu opisanego na dowolnym trójkącie w zadaniach z planimetrii,
- stosuje wzór $P = \frac{abc}{4R}$,
- wyprowadza wzór $P = \frac{abc}{4R}$.

Ćwiczenie 1

Niech O będzie punktem przecięcia symetralnych boków AB i AC trójkąta ABC. Wówczas $|AO| = |BO|$ oraz $|AO| = |CO|$. Stąd $|BO| = |CO|$, czyli punkt O leży na symetralnej boku BC. Zatem symetralne boków trójkąta ABC przecinają się w punkcie O.

Ćwiczenie 2

Niech D będzie spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C, wówczas:

$|CD| = R + |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, czyli

$|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - R$

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 3

a) Bok trójkąta: $a = 16$ cm
Promień koła: $R = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm
Pole koła: $P = \frac{256}{3}\pi$ cm^2

b) Bok trójkąta: $a = 6\sqrt{3}$ cm
Wysokość trójkąta: $h = 9$ cm
Pole trójkąta: $P = 27\sqrt{3}$ cm^2

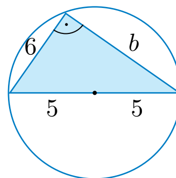
Multiteka
- Okrąg opisany na trójkącie

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.5

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 1

Na trójkącie prostokątnym o jednej z przyprostokątnych długości 6 opisano okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego trójkąta.



Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej (jest ona średnicą tego okręgu), zatem przeciwprostokątna ma długość $c = 2R = 2 \cdot 5 = 10$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, skąd $b = 8$, więc pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ćwiczenie 4

a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 7 cm i 12 cm.

b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe 18 cm^2. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 4 cm. Oblicz długość okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 5

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego wpisanego w okrąg o promieniu 5, jeśli:

a) jest to trójkąt równoramienny,

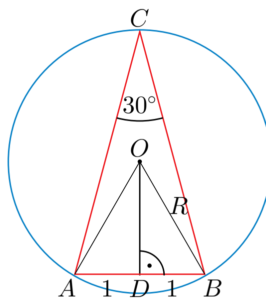
b) jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej.

Ćwiczenie 6

Odległości środka okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym od jego przyprostokątnych wynoszą 4 i 6. Oblicz pole trójkąta.

Przykład 2

Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ma miarę 30°, a podstawa trójkąta ma długość 2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie oraz odległość środka tego okręgu od podstawy trójkąta.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas kąt AOB jest kątem środkowym, opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB, zatem: $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 60°$, czyli trójkąt AOB jest równoboczny, więc $R = |OA| = |OB| = |AB| = 2$. Odległość środka okręgu od podstawy trójkąta jest równa $|OD|$, a odcinek OD jest wysokością trójkąta równobocznego:

$$|OD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Ćwiczenie 4

a) $(2R)^2 = 7^2 + 12^2$

$R = \frac{\sqrt{193}}{2}$ cm

b) $P = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 4 = 18$

$R = 4{,}5$ cm

$l = 9\pi$ cm

Ćwiczenie 5

a) Przyprostokątne trójkąta: $5\sqrt{2}$

$Ob = 10(1 + \sqrt{2})$

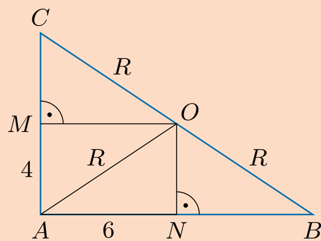
b) Przyprostokątne trójkąta: x, $3x$

$x^2 + (3x)^2 = 10^2$

$x = \sqrt{10}$

$Ob = 2(5 + 2\sqrt{10})$

Ćwiczenie 6



Zauważmy, że $|CM| = 4$ i $|NB| = 6$.

Pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$

Ćwiczenie 7

a) W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę $45°$, a podstawa ma długość 4 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

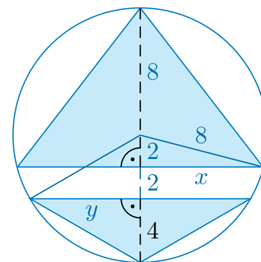
b) W okrąg o promieniu 5 cm wpisany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm. Oblicz długości ramion tego trójkąta (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 8

Oblicz pole trójkąta równoramiennego o kącie między ramionami równym $120°$, jeśli trójkąt ten jest wpisany w okrąg o promieniu 4.

Ćwiczenie 9

Oblicz stosunek pól przedstawionych na rysunku trójkątów równoramiennych wpisanych w okrąg o promieniu 8.



Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą długości boków trójkąta, jego pole oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wpisanego w okrąg o promieniu R wyraża się wzorem:

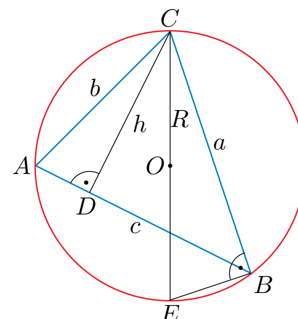
$$P = \frac{abc}{4R}$$

Dowód

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości a, b, c (rysunek obok), wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Odcinek CD jest wysokością trójkąta, a odcinek CE – średnicą okręgu. Kąty CAB i CEB są równe (dlaczego?). Zatem trójkąty ACD i ECB są podobne, czyli:

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}, \text{ stąd } h = \frac{ab}{2R}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}c \cdot \frac{ab}{2R} = \frac{abc}{4R}$$



Ćwiczenie 10

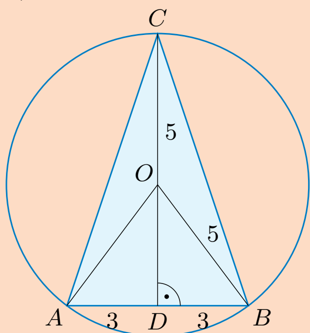
a) Oblicz pole trójkąta o bokach 4 cm, 13 cm i 15 cm wpisanego w okrąg o promieniu równym $\frac{65}{8}$ cm.

b) Dany jest trójkąt o bokach 13 cm, 14 cm i 15 cm i polu równym 84 cm^2. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 7

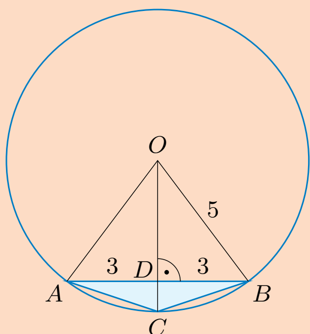
a) Trójkąt AOB jest prostokątny, zatem $R = 2\sqrt{2}$.

b) I przypadek



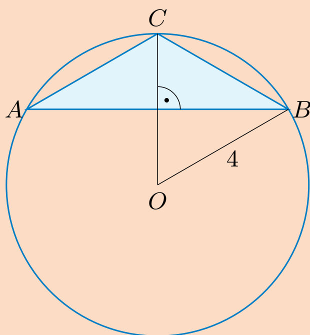
$|OD| = 4$ cm
$|DC| = 9$ cm
$|AC| = |BC| = 3\sqrt{10}$ cm

II przypadek



$|OD| = 4$ cm
$|DC| = 1$ cm
$|AC| = |BC| = \sqrt{10}$ cm

Ćwiczenie 8



Trójkąt BOC jest równoboczny, czyli $|CB| = 4$ i $\sphericalangle ACB = 120°$.

$P = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 120° = 4\sqrt{3}$

Ćwiczenie 9

$x = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$

$y = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

Stosunek pól: $\frac{\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{15} \cdot 10}{\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

Ćwiczenie 10

a) 24 cm^2

b) 8,125 cm

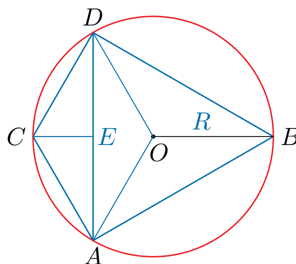
Zadania

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, jeśli:
a) jego pole wynosi 8 cm^2, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 2 cm,
b) krótsza przyprostokątna ma długość 5 cm, a jeden z kątów ostrych trójkąta jest dwa razy większy od drugiego,
c) jest on równoramienny, a jego obwód wynosi 6 cm.

2. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równy $3:4$. Pole koła opisanego na tym trójkącie wynosi $6{,}25\pi$ cm^2. Oblicz pole tego trójkąta.

3. Jakie największe pole może mieć trójkąt prostokątny wpisany w okrąg o promieniu 3?

4. W okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny ABD i trójkąt równoramienny ACD (rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

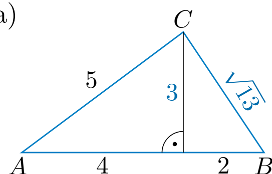


5. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o podstawie 8 cm, jeśli:
a) jego ramię ma długość $4\sqrt{5}$ cm,
b) sinus kąta przy tej podstawie jest równy $\frac{3}{5}$.

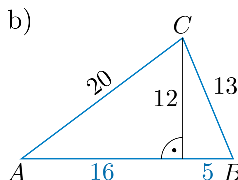
6. Do podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono wysokość h. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli opisany na nim okrąg ma promień równy 13 cm.
a) $h = 20$ cm
b) $h = 6$ cm

7. Oblicz pole trójkąta ABC oraz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

a)



b)



8. Dane są punkty $A(-1,-2)$ i $B(5,-2)$. Odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC. Okrąg opisany na tym trójkącie ma promień równy 5. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

9. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o bokach 12, 17, 25.

Odpowiedzi do zadań

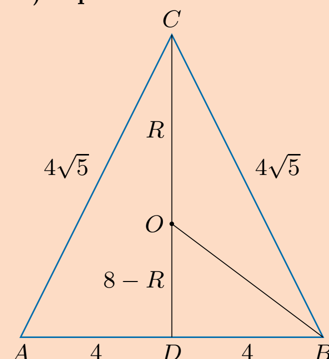
1. a) 4 cm **b)** 5 cm
c) $3(\sqrt{2}-1)$ cm

2. 6 cm^2

3. 9

4. $R = 4\sqrt{3}$
$\triangle AOE$ i $\triangle DOE$ są trójkątami o kątach 30°, 60°, 90°, stąd:
$|DE| = |EA| = 6$
$|EO| = 2\sqrt{3} = |EC|$
$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$
$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{ACD} =$
$= 48\sqrt{3}$

5. a) I sposób



Wysokość trójkąta:
$|CD| = 8$ cm, wówczas:
$(8-R)^2 + 4^2 = R^2$
$R = 5$ cm

II sposób
Wysokość trójkąta: 8 cm
Pole trójkąta: 32 cm^2
$32 = \frac{8 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4R}$
$R = 5$ cm

b) Wysokość trójkąta: 3cm
Ramię trójkąta: 5cm
Pole trójkąta: 12 cm^2
$12 = \frac{8 \cdot 5 \cdot 5}{4R}$
$R = \frac{25}{6}$ cm

6. a) $4\sqrt{10}(\sqrt{3}+\sqrt{13})$ cm **b)** $4\sqrt{3}(\sqrt{13}+\sqrt{10})$ cm

7. a) $P = 9$
$9 = \frac{6 \cdot 5 \cdot \sqrt{13}}{4R}$
$R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$
b) $P = 126$
$126 = \frac{21 \cdot 20 \cdot 13}{4R}$
$R = \frac{65}{6}$

8. Niech O będzie środkiem okręgu, $D(2,-2)$ – środkiem odcinka AB.
Zatem $|AD| = 3$ oraz $|OD| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $OD \perp AB$, więc $O(2,2)$ lub $O(2,-6)$.
$|CO| = R = 5$ i punkt C leży na prostej OD, zatem $C(2,-3)$ lub $C(2,7)$ lub $C(2,-11)$ lub $C(2,-1)$.

9. Ze wzoru Herona:
$P = \sqrt{27(27-12)(27-17)(27-25)} = 90$
$90 = \frac{12 \cdot 17 \cdot 25}{4R}$
$R = \frac{85}{6}$

5.6. Okrąg wpisany w trójkąt

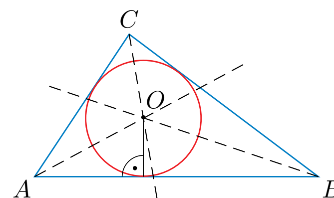
Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny lub prostokątny,
- rozwiązuje zadania dotyczące okręgu wpisanego w dowolny trójkąt,
- stosuje wzór $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$,
- wyprowadza wzór:
$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

Okrąg nazywamy wpisanym w trójkąt, jeżeli wszystkie boki trójkąta są styczne do tego okręgu. Mówimy też, że trójkąt jest opisany na okręgu.
W każdy trójkąt można wpisać okrąg – mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



D Ćwiczenie 1

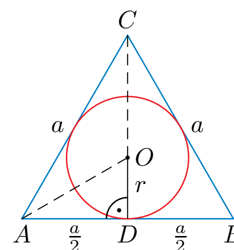
Udowodnij, że dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Rozpatrz najpierw odległości punktu przecięcia dwusiecznych dwóch kątów wewnętrznych trójkąta od jego boków.

Ćwiczenie 1
Niech O będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAB i ABC trójkąta ABC. Punkt O jest równo oddalony od boków AC i AB oraz od boków AB i BC. W związku z tym jest równo oddalony od boków AC i BC, czyli leży na dwusiecznej kąta ACB. Zatem dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają się w punkcie O.

Twierdzenie

Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku a wyraża się wzorem:
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



Dowód

Odcinek AO (rysunek powyżej) jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC, czyli $\sphericalangle OAD = 30^\circ$. Zatem $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \sphericalangle OAD = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, stąd $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

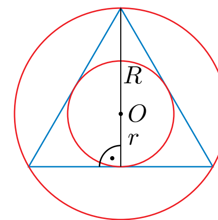
Ćwiczenie 2

a) Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 18.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o długości 10π.

Ćwiczenie 2
a) $r = 3\sqrt{3}$
$l = 6\sqrt{3}\pi$
b) $r = 5$
$5 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, czyli $a = 10\sqrt{3}$
$Ob = 30\sqrt{3}$

Zwróć uwagę na okrąg wpisany w trójkąt równoboczny i okrąg opisany na tym trójkącie – mają one wspólny środek (punkt O na rysunku obok). Punkt ten dzieli wysokość trójkąta równobocznego w stosunku $2:1$ (liczymy od wierzchołka trójkąta).



Ćwiczenie 3

Oblicz sumę długości okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o obwodzie równym 36 cm i okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 3
$a = 12$ cm
$r = 2\sqrt{3}$ cm
$R = 4\sqrt{3}$ cm
$2\pi r + 2\pi R = 12\sqrt{3}\pi$ cm

Multiteka
- Okrąg wpisany w trójkąt
- Okrąg i trójkąt

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.6

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 1

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12.

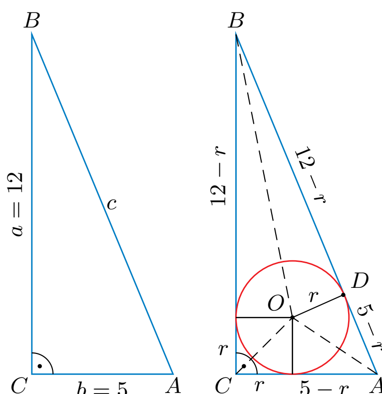
Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Przy oznaczeniach jak na rysunku obok:

$$|AD| = 5 - r \quad \text{i} \quad |BD| = 12 - r$$

Zatem $(5 - r) + (12 - r) = 13$.
Stąd otrzymujemy $r = 2$.



Ćwiczenie 4

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości: a) 3 i 4, b) 7 i 24.

Ćwiczenie 5

a) Na okręgu o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

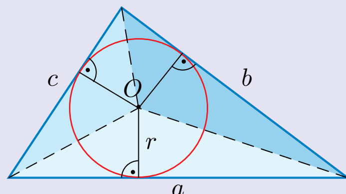
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 10 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Poniższe twierdzenie pokazuje, jaka zależność łączy ze sobą obwód trójkąta, jego pole oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe iloczynowi połowy obwodu tego trójkąta i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

$$P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$



Uwaga. Jeśli przez p oznaczymy połowę obwodu trójkąta: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to $P = p \cdot r$.

D **Ćwiczenie 6**

Uzasadnij podany wzór na pole trójkąta, korzystając z powyższego rysunku.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta o bokach 5, 5 i 6 opisanego na okręgu długości 3π.

Ćwiczenie 4

a) $c = 5$

$$3 - r + 4 - r = 5$$
$$r = 1$$

b) $c = 25$

$$7 - r + 24 - r = 25$$
$$r = 3$$

Ćwiczenie 6

$$P = \tfrac{1}{2}ra + \tfrac{1}{2}rb + \tfrac{1}{2}rc =$$
$$= \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = \tfrac{a+b+c}{2} \cdot r$$

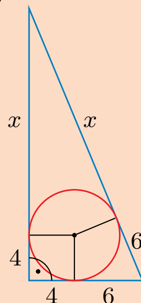
Ćwiczenie 7

$r = \frac{3}{2}$

$P = \frac{5+5+6}{2} \cdot \frac{3}{2} = 12$

Ćwiczenie 5

a)

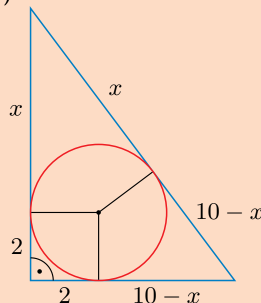


Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(x+4)^2 + 10^2 = (x+6)^2$$

Stąd $x = 20$. Zatem pozostałe boki mają długości 24 cm i 26 cm.

b)



Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(x+2)^2 + (2+10-x)^2 = 10^2$$
$$x^2 - 10x + 24 = 0$$
$$x = 4 \text{ lub } x = 6$$

Zatem pozostałe boki mają długości 6 cm i 8 cm.

Przykład 2

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Oznaczmy $a = 9$ i $b = 12$. Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

Obwód trójkąta jest równy $a + b + c = 36$, a pole $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$. Przekształcamy wzór na pole trójkąta $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt: $r = \frac{2P}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 54}{36} = \frac{108}{36} = 3$

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt o bokach a, b, c oraz polu P wyraża się wzorem: $r = \frac{2P}{a+b+c}$

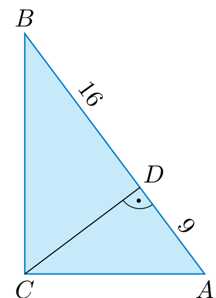
Ćwiczenie 8

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: a) 12 i 16, b) 1 i 1, c) 10 i 24, d) 2 i $\sqrt{5}$.

Mówimy, że koło jest wpisane w trójkąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Ćwiczenie 9

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC dzieli jego przeciwprostokątną na odcinki o długościach 9 i 16 (rysunek obok).



D a) Uzasadnij, że trójkąty ABC, ACD i CBD są podobne.

b) Oblicz długości boków trójkąta ABC.

c) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ABC.

d) Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt ACD oraz promień i pole koła wpisanego w trójkąt CBD.

Ćwiczenie 10

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość x, a jego ramię – długość y. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) $x = 12$, $y = 10$ b) $x = 10$, $y = 13$

Ćwiczenie 11

a) Na okręgu o promieniu 3 opisano trójkąt równoramienny o kącie między ramionami równym 120°. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) W trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie równym 30° wpisano okrąg o promieniu 2. Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 8

c – przeciwprostokątna,
$r = \frac{2P}{a+b+c}$

a) $c = 20$, $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16}{12+16+20} = 4$

b) $c = \sqrt{2}$,
$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1}{1+1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

c) $c = 26$, $r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24}{10+24+26} = 4$

d) $c = 3$,
$r = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+3} = \frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Ćwiczenie 9

a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BCD$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = \sphericalangle CDB = 90^\circ$
Zatem trójkąty ABC, ACD, CBD są podobne (cecha KKK).

b) $\frac{|CA|}{9} = \frac{25}{|CA|}$, czyli $|CA| = 15$
$\frac{|CB|}{16} = \frac{25}{|CB|}$, czyli $|CB| = 20$

c) $r = 5$, $P = 25\pi$

d) Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACD otrzymujemy:
$|CD| = 12$
Zatem dla trójkąta ACD:
$r_1 = 3$, $P_1 = 9\pi$
oraz dla trójkąta CBD:
$r_2 = 4$, $P_2 = 16\pi$

Ćwiczenie 10

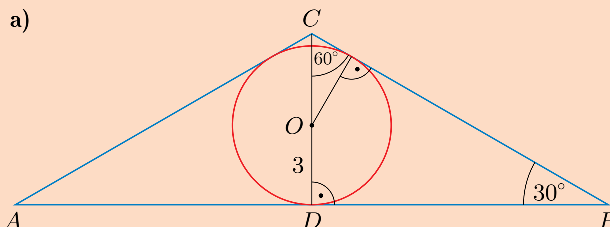
Niech h – wysokość trójkąta.

a) $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 12\right)^2} = 8$
$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$
$r = \frac{2 \cdot 48}{12+10+10} = 3$

b) $h = \sqrt{13^2 - (\frac{1}{2} \cdot 10)^2} = 12$
$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$
$r = \frac{2 \cdot 60}{10+13+13} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

Ćwiczenie 11

a)



$|OC| = 2\sqrt{3}$
$|AC| = |BC| = 2(3 + 2\sqrt{3})$
$|DB| = (3 + 2\sqrt{3})\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} + 2)$, czyli $|AB| = 6(\sqrt{3} + 2)$

b) $P = \frac{28}{3}\sqrt{3} + 16$

Zadania

D **1.** Uzasadnij, że pole trójkąta równobocznego o boku długości a wyraża się wzorem $P = \frac{3}{2}ar$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

2. a) Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o promieniu 2.

b) Oblicz stosunek pola koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

3. a) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

b) W trójkącie prostokątnym krótsza przyprostokątna ma długość 6, a jeden z kątów ma miarę 60°. Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

D **4.** Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b oraz przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

5. Na okręgu o promieniu 2 opisano trójkąt prostokątny. Oblicz jego pole, jeśli odległość środka okręgu od wierzchołka jednego z kątów ostrych trójkąta jest równa $2\sqrt{10}$.

6. Obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu długości x jest równy q. Oblicz długość okręgu wpisanego w ten trójkąt.

a) $x = 15$, $q = 54$ b) $x = 13$, $q = 50$

7. Na okręgu opisano trójkąt równoramienny o podstawie długości 8. Oblicz promień tego okręgu, jeśli jego środek dzieli wysokość trójkąta opuszczoną na podstawę w stosunku $2:3$ (liczymy od podstawy trójkąta).

8. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 6 cm i wysokości 4 cm wpisano koło oraz w trójkąt równoramienny o podstawie długości 8 cm i wysokości 3 cm wpisano koło. Oblicz różnicę pól tych kół.

9. W trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramieniu długości 6 cm wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz odległości środka okręgu od wierzchołków tego trójkąta.

10. W trójkąt wpisano okrąg o promieniu 4. Jeden z boków tego trójkąta został podzielony przez punkt styczności okręgu na odcinki o długościach 4 i $4\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

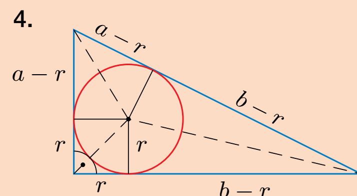
Odpowiedzi do zadań

1. $P = \frac{a+a+a}{2} \cdot r = \frac{3}{2}ar$

2. a) $12\sqrt{3}$
b) 4

3. a) $2(\sqrt{3} - 1)$
b) $6\pi(\sqrt{3} - 1)$

4.



$c = a - r + b - r$
$2r = a + b - c$
$r = \frac{1}{2}(a + b - c)$

5.

$(b - 2)^2 + 4 = (2\sqrt{10})^2$
$(b - 2)^2 = 36$, czyli $b = 8$
$a^2 + 8^2 = (a + 4)^2$, czyli $a = 6$
$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

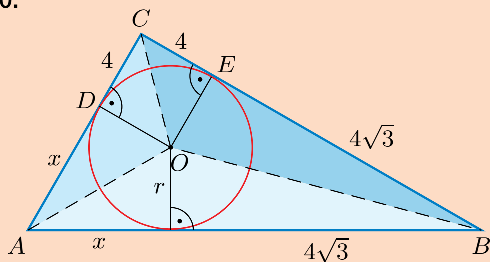
6. a) 8π **b)** $4{,}8\pi$

7. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

8. Promienie kół: $r_1 = \frac{3}{2}$ cm, $r_2 = \frac{4}{3}$ cm
Różnica pól: $\frac{17}{36}\pi$ cm^2

9. $r = \sqrt{2}$ cm
$|OA| = |OB| = \sqrt{6}$ cm
$|OC| = 3\sqrt{2}$ cm

10.



Czworokąt $CDEO$ jest rombem, który ma kąt prosty, więc jest kwadratem, czyli $\sphericalangle ACB = 90°$.

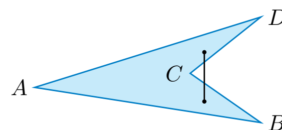
$(4 + 4\sqrt{3})^2 + (4 + x)^2 = (x + 4\sqrt{3})^2$
$x = 4(2 + \sqrt{3})$

Pozostałe boki trójkąta:
$4 + x = 4(\sqrt{3} + 3)$,
$4\sqrt{3} + x = 8(\sqrt{3} + 1)$

Warto powtórzyć

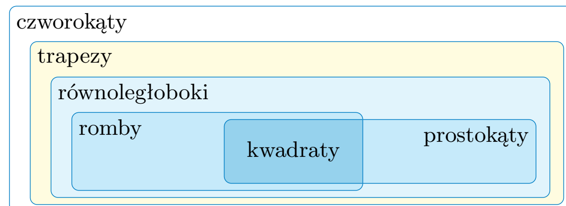
Czworokąty wypukłe

Wielokąt nazywamy **wypukłym**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty tego wielokąta jest w nim zawarty. Wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta wypukłego są wypukłe. Wielokąt, który nie jest wypukły, nazywamy **wklęsłym**.

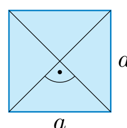


Czworokąt $ABCD$ nie jest wypukły.

Czworokątami wypukłymi są m.in.: kwadraty, romby, prostokąty, równoległoboki i trapezy.



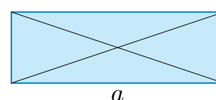
Kwadrat



$P = a^2$

- Wszystkie kąty są proste, wszystkie boki są równej długości.
- Przekątne są równej długości, są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

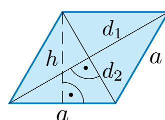
Prostokąt



$P = a \cdot b$

- Wszystkie kąty są proste, przeciwległe boki są równe i równoległe.
- Przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

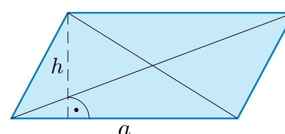
Romb



$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = a \cdot h$

- Wszystkie boki są równej długości, przeciwległe boki są równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Przekątne są do siebie prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180°.

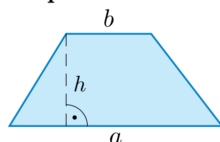
Równoległobok



$P = a \cdot h$

- Przeciwległe boki są równe i równoległe, przeciwległe kąty są równe.
- Punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
- Suma kątów wewnętrznych przy jednym boku jest równa 180°.

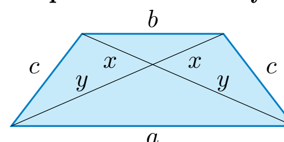
Trapez



$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

- Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
- Suma kątów wewnętrznych przy każdym z ramion jest równa 180°.

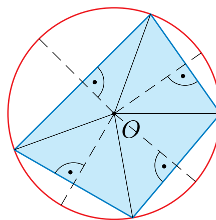
Trapez równoramienny



- W trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem, przekątne są równej długości, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy.

*5.7. Okrąg opisany na czworokącie

Okrąg jest opisany na czworokącie, jeżeli wszystkie wierzchołki czworokąta należą do okręgu. Mówimy też, że czworokąt jest wpisany w okrąg.
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne jego boków przecinają się w jednym punkcie (uzasadnij). Punkt ten jest środkiem okręgu opisanego.



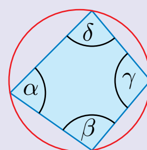
Nie na każdym czworokącie można opisać okrąg.

D **Ćwiczenie 1**
Uzasadnij, że równoległobok, na którym można opisać okrąg, jest prostokątem.

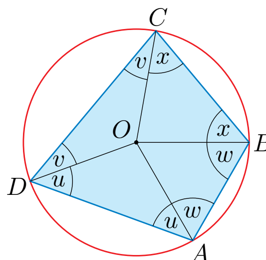
Twierdzenie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180°:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



D **Ćwiczenie 2**
Udowodnij, że jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180°. Skorzystaj z:
a) rysunku obok,
b) twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku (str. 235).



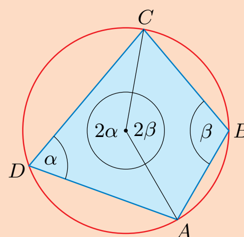
Ćwiczenie 3
Kąty α i β to sąsiednie kąty wewnętrzne czworokąta. Oblicz miary pozostałych kątów tego czworokąta, jeżeli wiadomo, że można na nim opisać okrąg.
a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ b) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 50^\circ$ c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 150^\circ$

Ćwiczenie 4
Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$, jeżeli wiadomo, że na czworokącie tym można opisać okrąg, oraz spełnione są podane warunki.
a) $\sphericalangle A = 2\sphericalangle C$, $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\sphericalangle D$ b) $\sphericalangle A = 3\sphericalangle C$, $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$

Ćwiczenie 2
a) Zauważmy, że $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA = 360^\circ$.
$180^\circ - 2w + 180^\circ - 2x + 180^\circ - 2v + 180^\circ - 2u = 360^\circ$
$w + x + v + u = 180^\circ$
Zatem sumy miar przeciwległych kątów czworokąta $ABCD$ są równe i mają po 180°.
b) Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku (rysunek obok).
Zauważmy, że $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, zatem $\alpha + \beta = 180^\circ$.
Suma miar kątów w czworokącie jest równa 360°, zatem:

$$\sphericalangle DCB + \sphericalangle DAB = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Sumy miar przeciwległych kątów czworokąta $ABCD$ są równe i mają po 180°.



Uczeń:
- sprawdza, czy na danym czworokącie można opisać okrąg,
- stosuje twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązywania zadań,
- uzasadnia, że jeśli na czworokącie można opisać okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów tego czworokąta są równe i mają po 180°.

Komentarz
Punkty leżące na symetralnej odcinka są równo odległe od końców tego odcinka. Zatem jeżeli symetralne boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie, to punkt ten jest równo odległy od wszystkich końców boków tego czworokąta (wierzchołków czworokąta). Czyli jest to środek okręgu opisanego na tym czworokącie.

Ćwiczenie 1
Jeżeli równoległobok nie jest prostokątem, to symetralne przeciwległych boków są równoległe, ale różne – nie przecinają się.
Jeżeli równoległobok jest prostokątem, to symetralne przeciwległych boków się pokrywają, a symetralne prostopadłych boków przecinają się w jednym punkcie.

Ćwiczenie 3
a) 120°, 135°
b) 80°, 130°
c) 30°, 60°

Ćwiczenie 4
a) $\sphericalangle A = 120^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 120^\circ$
b) $\sphericalangle A = 135^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 45^\circ$, $\sphericalangle D = 90^\circ$

Multiteka
- Okrąg opisany na czworokącie

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.7

Generator testów i sprawdzianów

D **Ćwiczenie 5**

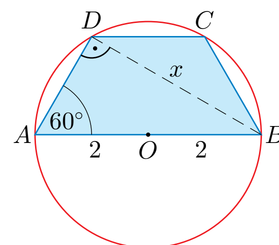
Uzasadnij, że trapez, na którym można opisać okrąg, jest równoramienny.

Ćwiczenie 6

Na trapezie o kolejnych kątach: α, β, γ i δ można opisać okrąg. Oblicz miary kątów tego trapezu, jeśli wiadomo, że $\gamma = 4\alpha$.

Przykład 1

Jedna z podstaw trapezu $ABCD$, wpisanego w okrąg o promieniu 2, jest średnicą tego okręgu, a jeden z jego kątów ma miarę $60°$. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.



Na trapezie można opisać okrąg, więc jest to trapez równoramienny – jego przekątne mają równą długość. Kąt ADB jest kątem prostym (jest oparty na średnicy), zatem $\sin 60° = \frac{x}{4}$ i stąd:

$$x = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Każda z przekątnych ma długość $2\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 7

a) Oblicz obwód trapezu z powyższego przykładu.

b) Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Ramię trapezu ma długość 1 cm, a jego przekątne przecinają się pod kątem $60°$. Oblicz obwód tego trapezu.

Mówimy, że koło jest opisane na czworokącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Zadania

1. Czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach, gdzie $\alpha > 0$, można opisać okrąg?

a) α, 2α, 3α, 4α b) 2α, α, 4α, 5α c) 3α, 4α, 3α, 2α

2. a) Oblicz pole koła opisanego na prostokącie o bokach długości 6 i 10.

b) W okrąg o promieniu 20 wpisano prostokąt. Stosunek długości jego boków jest równy $3:4$. Oblicz pole tego prostokąta.

3. Przekątne prostokąta przecinają się pod kątem $60°$. Oblicz pole koła opisanego na tym prostokącie, jeśli wiadomo, że długość równą 6 cm ma jego:

a) krótszy bok, b) dłuższy bok.

Odpowiedzi do zadań

1. a) nie

b), **c)** tak

2. a) Promień:

$R = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{34}$

Pole: $P = 34\pi$

b) $(3x)^2 + (4x)^2 = (2 \cdot 20)^2$

$x^2 = 64$

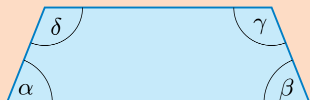
Pole: $P = 3x \cdot 4x = 12x^2 = 768$

3. a) 36π cm^2

b) 12π cm^2

Ćwiczenie 5

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$\delta = 180° - \alpha$, $\gamma = 180° - \beta$

Na trapezie można opisać okrąg, czyli:

$\alpha + 180° - \beta = \beta + 180 - \alpha$

Stąd $\alpha = \beta$, zatem trapez jest równoramienny.

Ćwiczenie 6

Na trapezie można opisać okrąg, czyli jest to trapez równoramienny, zatem $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$ oraz $\alpha + \gamma = 180°$.

Z założenia mamy $\gamma = 4\alpha$, czyli $5\alpha = 180°$, stąd $\alpha = 36°$ oraz $\gamma = 144°$.

Ćwiczenie 7

a) Zauważmy, że trójkąty:

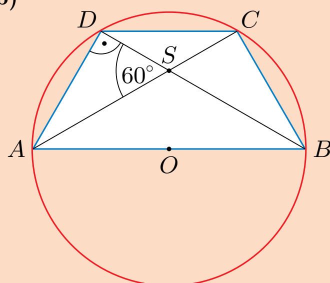
AOD, BOC i CDO

są równoboczne, zatem

$|AD| = |CD| = |BC| = 2$.

Stąd $Ob = 10$.

b)



$\sphericalangle ADB = 90°$ (kąt wpisany oparty na półokręgu)

$\sphericalangle DAS = 30°$

$\sphericalangle ASB = 180° - \sphericalangle ASD =$

$= 180° - 60° = 120°$

$\sphericalangle SAO = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$

Zatem $\sphericalangle BAD = 30° + 30° = 60°$

oraz trójkąty AOD, BOC, COD są równoboczne, więc

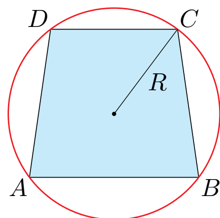
$Ob = 5|AD| = 5$ cm

4. a) Na trapezie, którego wysokość jest równa 4 cm, opisano okrąg o promieniu 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu, jeśli wiadomo, że jedna z jego podstaw jest średnicą tego okręgu.

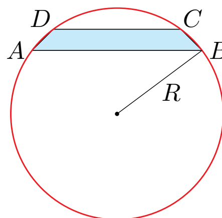
b) Jedna z podstaw trapezu jest średnicą opisanego na nim okręgu. Kąt między przekątną trapezu a tą podstawą ma miarę 30°, a wysokość trapezu jest równa 2 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

5. Na trapezie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu $R = 5$ (rysunek poniżej). Oblicz pole tego trapezu, jeśli $|AB| = 8$ oraz $|CD| = 6$.

a)



b)



6. Na trapezie $ABCD$ opisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu R. Kąt między dłuższą podstawą AB a promieniem okręgu poprowadzonym do punktu A jest równy 30°. Oblicz długości podstaw tego trapezu, jeśli jego wysokość jest równa h.

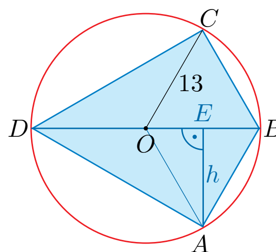
a) $R = 4$ cm, $h = 5$ cm b) $R = 10$ cm, $h = 3$ cm

7. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a przekątna jest dwusieczną kąta przy dłuższej podstawie. Oblicz długości boków tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego pole jest równe 9 cm². Oblicz pole koła opisanego na tym trapezie.

D **8.** a) Udowodnij, że jeśli na deltoidzie o bokach x i y można opisać okrąg, to pole tego deltoidu wyraża się za pomocą wzoru: $P = xy$.

b) Oblicz promień okręgu opisanego na deltoidzie o bokach długości 7 cm i 24 cm.

9. Na deltoidzie o polu równym 312 opisany jest okrąg o promieniu 13 (rysunek obok). Oblicz obwód deltoidu oraz pole trójkąta AOD.



***10.** Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu 6. Boki AD i DC mają równe długości, a kąt ABC ma miarę 120°. Oblicz pole tego czworokąta, jeśli wiadomo, że stosunek pól trójkątów ABD i BCD jest równy 2 : 1.

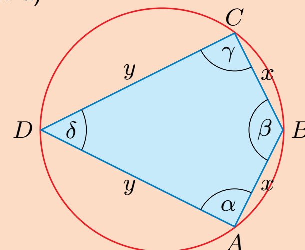
4. a) $4(4 + \sqrt{5})$ cm
b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

5. a) 49 **b)** 7

6. a) $4\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{7}$ cm
b) $10\sqrt{3}$ cm, 12 cm

7. $4\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm, $2\sqrt[4]{3}$ cm,
$P = 4\pi\sqrt{3}$ cm²

8. a)

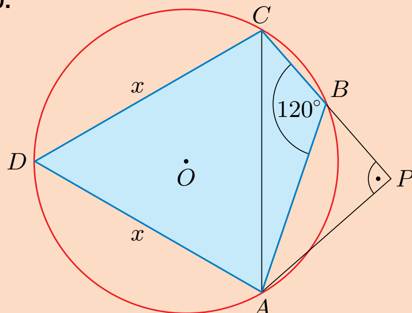


Deltoid jest wpisany w okrąg, czyli:
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$
Ponieważ $\alpha = \gamma$, kąty te są proste, a trójkąty DCB i DAB – prostokątne.
Stąd pole tego deltoidu wynosi: $P = 2 \cdot \frac{1}{2}xy = xy$.

b) 12,5 cm

9. $P = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC| = 312$
Stąd $|AC| = 24$ i $h = 12$.
$|OE| = \sqrt{|OA|^2 - h^2} = 5$
$|AD| = \sqrt{|DE|^2 + h^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$
$|AB| = \sqrt{|BE|^2 + h^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$
$Ob = 20\sqrt{13}$
$P_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot |DO| \cdot h = 78$

10.



$\sphericalangle ABC = 120°$, stąd $\sphericalangle ADC = 60°$, czyli trójkąt ADC jest równoboczny, czyli $|AC| = x$. Zauważmy, że $\frac{x\sqrt{3}}{3} = 6$ (patrz str. 240). Zatem $x = 6\sqrt{3}$.

Niech $\sphericalangle BAD = \alpha$, wówczas $\sphericalangle DCB = 180° - \alpha$.

Wiemy, że $P_{ABD} = 2P_{BCD}$, czyli $\frac{1}{2}|AB|x \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2}|BC|x \cdot \sin(180° - \alpha)$, zatem mamy: $|AB| = 2|BC|$.

Niech $|BC| = y$, czyli $|AB| = 2y$.
$P = P_{ADC} + P_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot y \cdot \sin 120° = 27\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}y^2$

Rozważmy trójkąt APC. Zauważmy, że $|BP| = y$ oraz $|AP| = y\sqrt{3}$.
$(2y)^2 + (y\sqrt{3})^2 = (6\sqrt{3})^2$, $y^2 = \frac{108}{7}$

Zatem pole czworokąta $ABCD$ wynosi: $P = 27\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{108}{7} = \frac{243}{7} \cdot \sqrt{3}$.

Warto wiedzieć

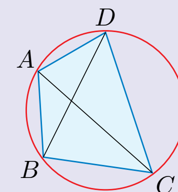
Twierdzenie Ptolemeusza

Poniższe twierdzenie przypisywane jest Klaudiuszowi Ptolemeuszowi, greckiemu astronomowi i matematykowi żyjącemu w Aleksandrii w II wieku n.e.

Twierdzenie

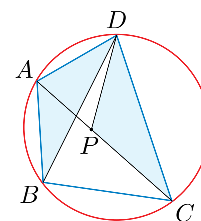
Jeśli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, to suma iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta jest równa iloczynowi długości jego przekątnych:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$



Dowód

Na przekątnej AC wybieramy punkt P tak, by kąty ADB i CDP były równe. Ponieważ kąty ABD i ACD są równe (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku), trójkąty ABD i PCD są podobne.



Zatem $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|PC|}$ i stąd:

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |PC| \qquad \text{(I)}$$

Kąty CAD i CBD są równe (jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku) oraz kąty BDC i ADP są równe (dlaczego?), więc trójkąty BCD i APD są podobne.

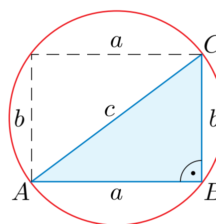
Zatem $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AP|}$ i stąd:

$$|AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |AP| \qquad \text{(II)}$$

Równości (I) i (II) dodajemy stronami i otrzymujemy:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |BD| \cdot |AP| + |BD| \cdot |PC| =$$
$$= |BD| \cdot (|AP| + |PC|) = |BD| \cdot |AC|$$

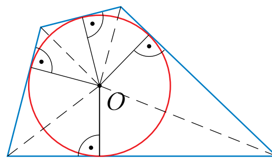
D **1.** Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, udowodnij twierdzenie Pitagorasa.



Odpowiedzi do zadań

1. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, mamy:
$a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$,
czyli $a^2 + b^2 = c^2$

*5.8. Okrąg wpisany w czworokąt



Okrąg jest wpisany w czworokąt, jeżeli wszystkie boki czworokąta są styczne do tego okręgu. Mówimy wtedy też, że czworokąt jest opisany na okręgu.

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów wewnętrznych tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie (uzasadnij). Punkt ten jest środkiem okręgu wpisanego.

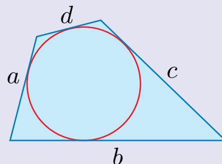
Nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg.

D **Ćwiczenie 1**
Uzasadnij, że prostokąt, w który można wpisać okrąg, jest kwadratem.

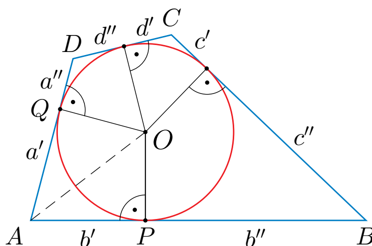
Twierdzenie

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe:

$$a + c = b + d$$



D **Ćwiczenie 2**
Skorzystaj z rysunku obok i udowodnij, że jeśli w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.



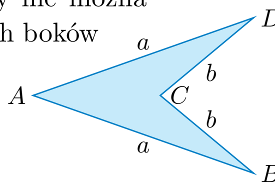
Ćwiczenie 3
Czy w czworokąt wypukły o podanych długościach kolejnych boków można wpisać okrąg?

a) 1, 5, 3, 7 b) 14, 9, 8, 13 c) 25, 16, 15, 24

D **Ćwiczenie 4**
Uzasadnij, że równoległobok, w który można wpisać okrąg, jest rombem.

Na rysunku obok przedstawiono czworokąt, w który nie można wpisać okręgu, mimo że sumy długości przeciwległych boków są równe:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$



Przykład ten pokazuje, że w twierdzeniu powyżej założenie, że czworokąt jest wypukły, jest istotne.

Uczeń:
- sprawdza, czy w dany czworokąt można wpisać okrąg,
- stosuje twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt do rozwiązywania zadań,
- uzasadnia, że jeśli w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Komentarz
Punkty leżące na dwusiecznej kąta są równo odległe od ramion tego kąta. Zatem jeżeli dwusieczne kątów czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie, to punkt ten jest równo odległy od wszystkich ramion tych kątów (boków czworokąta). Czyli jest to środek okręgu wpisanego w ten czworokąt.

Ćwiczenie 1
Oznaczmy boki prostokąta przez a i b.
Jeżeli w ten prostokąt można wpisać okrąg, to $2a = 2b$, czyli $a = b$.
Zatem prostokąt ten jest kwadratem.

Ćwiczenie 2
Wiemy, że $a'' = d''$, $a' = b'$, $b'' = c''$ i $c' = d'$.
Zatem $|AB| + |CD| =$
$= b' + b'' + d' + d'' =$
$= a' + c'' + c' + a'' =$
$= a' + a'' + c' + c'' =$
$= |AD| + |BC|$
Zatem sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Ćwiczenie 3
a) nie, $1 + 3 \neq 5 + 7$
b) tak, $14 + 8 = 9 + 13$
c) tak, $25 + 15 = 16 + 24$

Ćwiczenie 4
Oznaczmy boki równoległoboku przez a i b.
Jeżeli w ten równoległobok można wpisać okrąg, to $2a = 2b$, czyli $a = b$.
Zatem równoległobok ten jest rombem.

Multiteka
- Okrąg wpisany w czworokąt (1)
- Okrąg wpisany w czworokąt (2)

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.8

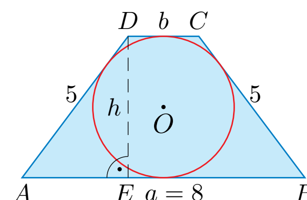
Generator testów i sprawdzianów

Przykład 1

Ramię trapezu równoramiennego ma długość 5, a jego dłuższa podstawa ma długość 8. W trapez ten wpisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu oraz pole trapezu.

W trapez wpisano okrąg, zatem sumy długości przeciwległych boków tego trapezu są równe: $8 + b = 5 + 5$, stąd $b = 2$. Zauważ, że:

$$|AE| = \frac{a-b}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$$



Na podstawie twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość trapezu: $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, czyli $h = 4$.

Promień okręgu wpisanego w ten trapez jest równy połowie jego wysokości, czyli $r = 2$.

Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$.

Ćwiczenie 5

a) W trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm jest wpisany okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

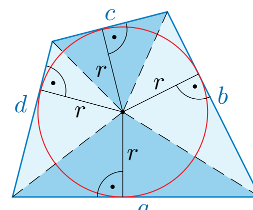
b) Na okręgu o promieniu 2 cm opisano trapez, którego ramiona mają długości 5 cm i 7 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

c) W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu o promieniu 4 cm, jedna z podstaw jest o 12 cm dłuższa od drugiej. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

D Ćwiczenie 6

Skorzystaj z rysunku obok i uzasadnij, że pole P czworokąta o obwodzie równym l opisanego na okręgu o promieniu r wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}rl$$



Zadania

1. a) Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 5 cm i 9 cm. Oblicz długość ramion i pole tego trapezu, jeżeli można w niego wpisać okrąg.

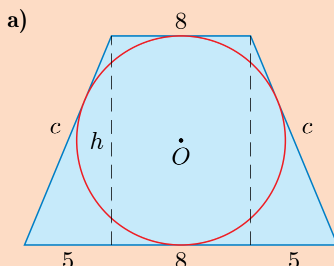
b) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 1 cm i 3 cm. Oblicz długości ramion tego trapezu, jeśli można w niego wpisać okrąg.

2. Oblicz pole trapezu równoramiennego o ramieniu długości 10 cm opisanego na okręgu o promieniu 4 cm.

3. W trapez równoramienny (niebędący rombem) o kącie ostrym 45° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

Ćwiczenie 5

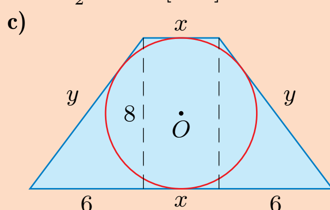
a)



$8 + 18 = 26 = 2c$,
czyli $c = 13$ cm
$h^2 + 5^2 = 13^2$
$h = 12$ cm
$P = 156$ cm^2

b) Suma podstaw:
$5 + 7 = 12$ [cm]
Wysokość: $h = 2r = 4$ cm
$Ob = 24$ cm
$P = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24$ [cm^2]

c)



$y^2 = 6^2 + 8^2$
$y = 10$ cm
$2y = 2x + 12$
$y = x + 6$
$x = 4$ cm
$Ob = 2 \cdot 10 + 4 + 16 = 40$ [cm]
$P = \frac{20 \cdot 8}{2} = 80$ [cm^2]

Ćwiczenie 6

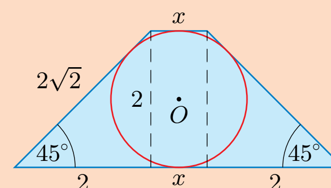
$P = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr =$
$= \frac{1}{2}r(a + b + c + d) = \frac{1}{2}rl$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $c = 7$ cm, $P = 21\sqrt{5}$ cm^2
b) $c = 2{,}5$ cm, $h = 1{,}5$ cm

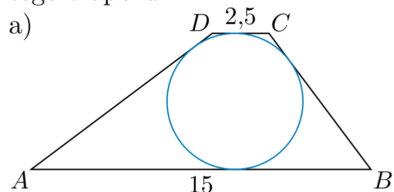
2. 80 cm^2

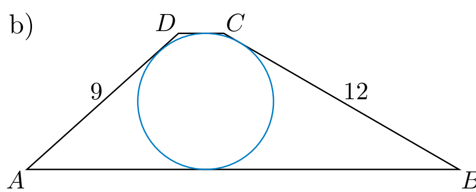
3.



$2x + 4 = 4\sqrt{2}$
$x = 2\sqrt{2} - 2$
Długości podstaw:
$2(\sqrt{2} - 1)$ cm, $2(\sqrt{2} + 1)$ cm

4. Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu o promieniu 3. Oblicz pole i obwód tego trapezu.

a)


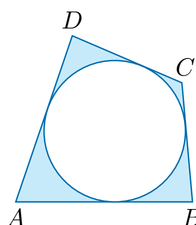
b)


5. W trapez o kątach ostrych przy dłuższej podstawie 30° i 60° wpisano okrąg o promieniu 1 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

6. Dłuższa z podstaw trapezu prostokątnego ma długość 6 cm, a promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 1 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.

7. a) W romb o boku długości 2 cm i kącie ostrym 60° wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

b) W romb o kącie ostrym 30° wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole tego rombu.



8. Czworokąt $ABCD$ (rysunek obok) jest opisany na okręgu o promieniu 2. Wiadomo, że $|AB| = 5$ oraz $|CD| = 3{,}4$. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

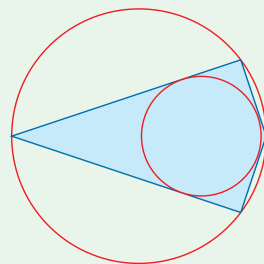
D **9.** Wykaż, że jeśli w trapez równoramienny (niebędący rombem) można wpisać okrąg, to wysokość tego trapezu h jest średnią geometryczną długości jego podstaw a i b, czyli $h = \sqrt{ab}$.

D **10.** a) Uzasadnij, że w dowolny deltoid można wpisać okrąg.

b) Pole deltoidu wynosi 42 cm², a jego obwód jest równy 28 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten deltoid.

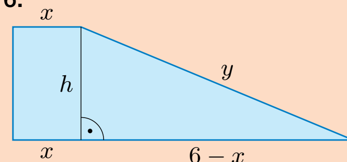
Czworokątem bicentrycznym nazywamy czworokąt, w który można wpisać okrąg i na którym można opisać okrąg. Przykładem takiego czworokąta jest kwadrat lub deltoid o dwóch kątach prostych.
Pole czworokąta bicentrycznego o bokach długości a, b, c, d wyraża się wzorem:

$$P = \sqrt{abcd}$$



4. a) $P = 52{,}5$, $Ob = 35$
b) $P = 63$, $Ob = 42$

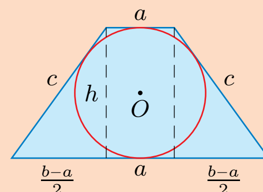
5. $2(1+\sqrt{3})$ cm, $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ cm

6.


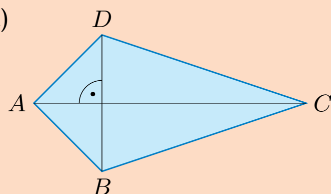
$h = 2$ cm
$h + y = x + 6$
$y = 4 + x$
$2^2 + (6-x)^2 = (4+x)^2$, $x > 0$
$x = 1{,}2$ cm

7. a) $\frac{3}{4}\pi$ cm²
b) 32 cm²

8. W czworokąt można wpisać okrąg, więc:
$|AD|+|BC| = |AB|+|CD| = 8{,}4$
$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot(|AB|+|BC|+|CD|+|DA|)\cdot 2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 16{,}8 = 16{,}8$
Pole zacieniowanego obszaru:
$P = 16{,}8 - 4\pi$

9.


$2c = a + b$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$
$h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
$h^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{b^2-2ab+a^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab$
$h = \sqrt{ab}$

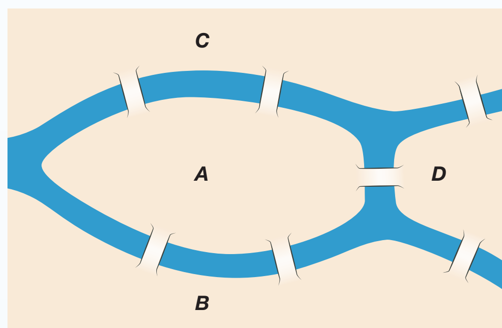
10. a)


Z definicji deltoidu:
$|AB| = |AD|$ i $|BC| = |DC|$,
czyli $|AB| + |DC| = |BC| + |AD|$,
zatem w deltoid można wpisać okrąg.

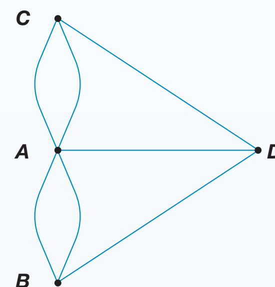
b) $l = 28$ cm
$P_{ABCD} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\cdot 28\cdot r = 14r = 42$
$r = 3$
Pole koła: $P = 9\pi$ cm²

Problem mostów królewieckich

W XVIII w. w Królewcu, mieście nad Pregołą, było aż siedem mostów. Czy można było przejść kolejno przez wszystkie mosty tak, aby każdy z nich przekroczyć tylko raz i wrócić do miejsca, z którego się wyruszyło? Na to pytanie odpowiedział w 1736 r. Leonhard Euler [czyt. leonard ojler], a zaproponowane przez niego rozwiązanie zapoczątkowało rozwój teorii grafów.



Układ mostów w XVIII-wiecznym Królewcu: jeden most łączy dwie wyspy (oznaczone *A* i *D*), sześć mostów łączy te wyspy z resztą miasta (litery *B* i *C*).



Układ mostów przedstawiony za pomocą grafu. Części miasta oznaczone na mapie jako *A*, *B*, *C* i *D* są wierzchołkami, a mosty – krawędziami grafu.

Stopniem wierzchołka grafu nazywamy liczbę krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. W powyższym grafie stopień wierzchołka *A* jest równy 5, a stopnie wierzchołków *B*, *C* i *D* są równe 3. Jest to przykład **grafu spójnego**, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami wiedzie droga prowadząca po jego krawędziach.

Euler wykazał, że w spójnym grafie „spacer" po wszystkich krawędziach, zaczynający się i kończący w tym samym wierzchołku, wykorzystujący każdą krawędź dokładnie jeden raz, jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wierzchołków ma stopień parzysty. Taki graf nazywamy **grafem eulerowskim** [czyt. ojlerowskim]. Graf z zadania nie jest grafem eulerowskim. Odpowiedź na pytanie dotyczące spaceru po mostach w Królewcu brzmi „nie".

1 Wyszukaj w dostępnych źródłach informacje o grafach.

2 Znajdź informacje o grafie półeulerowskim [czyt. półojlerowskim].

Kaliningrad,
niegdyś Królewiec

5.9. Wielokąty foremne

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe oraz wszystkie kąty równe.

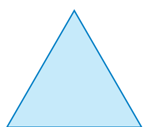
Ćwiczenie 1

Narysuj czworokąt oraz sześciokąt niebędące wielokątami foremnymi, które mają: a) wszystkie boki równe, b) wszystkie kąty równe.

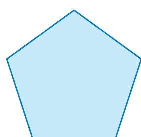
Ćwiczenie 2

Ile osi symetrii ma przedstawiony wielokąt foremny?

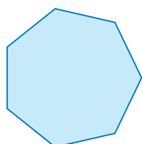
a) trójkąt



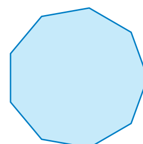
c) pięciokąt



e) siedmiokąt



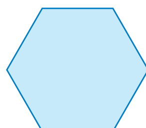
g) dziewięciokąt



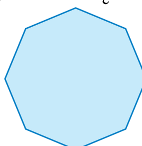
b) kwadrat



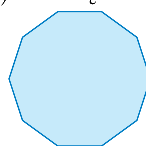
d) sześciokąt



f) ośmiokąt



h) dziesięciokąt

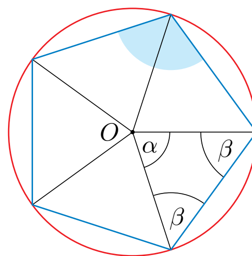


Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.

Mówimy, że koło jest opisane na wielokącie, gdy opisany jest na nim okrąg ograniczający to koło.

Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na pięciokącie foremnym. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego pięciokąta.



Kąt α ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Zatem:

$$\beta = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$$

czyli kąt wewnętrzny ma miarę równą $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę równą $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

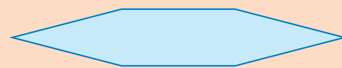
Uczeń:

- rozpoznaje wielokąty foremne i podaje ich własności,
- oblicza miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego,
- wyznacza liczbę boków wielokąta foremnego, gdy dana jest suma miar jego kątów wewnętrznych,
- oblicza promień okręgu opisanego na wielokącie foremnym i wpisanego w wielokąt foremny,
- formułuje twierdzenia dotyczące związków w wielokątach foremnych oraz dowodzi ich prawdziwości.

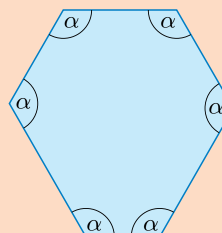
Ćwiczenie 1

Czworokąt niebędący wielokątem foremnym, który ma:
a) równe boki, to romb,
b) równe kąty, to prostokąt.

Sześciokąt niebędący wielokątem foremnym, który ma:
a) równe boki:



b) równe kąty (czyli $\alpha = 120^\circ$):



Ćwiczenie 2

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6
e) 7 **f)** 8 **g)** 9 **h)** 10

Ćwiczenie 3

Warto polecić uczniom wykonanie odpowiedniego rysunku.

I sposób

Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta jest równa $(n-2) \cdot 180^\circ$.
Zatem w n-kącie foremnym kąt wewnętrzny ma miarę:

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

II sposób

$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$

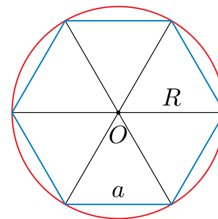
$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$

Multiteka
- Własności wielokątów foremnych

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.9

Generator testów i sprawdzianów

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O opisany na sześciokącie foremnym o boku a. Zauważ, że dłuższe przekątne sześciokąta dzielą go na sześć przystających trójkątów równobocznych. Zatem promień okręgu opisanego na sześciokącie foremnym ma długość równą długości boku sześciokąta: $R = a$.



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość okręgu opisanego na sześciokącie foremnym o polu $150\sqrt{3}$.

b) Oblicz pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o polu 32π.

Ćwiczenie 4

a) $P_{\triangle} = \frac{150\sqrt{3}}{6} = 25\sqrt{3}$

$R = a = 10$

$l = 20\pi$

b) $a = R = 4\sqrt{2}$

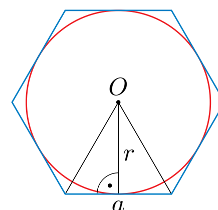
$P = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}$

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wielokąta.

Mówimy, że koło jest wpisane w wielokąt, gdy wpisany jest w niego okrąg ograniczający to koło.

Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O wpisany w sześciokąt foremny o boku a. Promień tego okręgu wyraża się wzorem:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Ćwiczenie 5

a) Oblicz pole koła wpisanego w sześciokąt foremny o obwodzie 54 cm.

b) Oblicz długości przekątnych sześciokąta foremnego opisanego na okręgu o długości 12π cm.

Ćwiczenie 5

a) $a = 9$ cm

$r = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm

$P = \frac{243}{4}\pi$ cm^2

b) $r = 6$ cm

$a = 4\sqrt{3}$ cm

$2a = 8\sqrt{3}$ cm, $a\sqrt{3} = 12$ cm

D Ćwiczenie 6

Dany jest n-kąt foremny o boku długości a opisany na okręgu o promieniu r. Uzasadnij, że pole tego wielokąta jest równe $\frac{1}{2}n \cdot a \cdot r$.

Ćwiczenie 6

n-kąt foremny składa się z n trójkątów równoramiennych o podstawie a i wysokości r, zatem:

$$P = n \cdot \frac{1}{2}ar = \frac{1}{2}nar$$

Zadania

1. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

a) ośmiokąta foremnego, b) dziesięciokąta foremnego.

2. Ile boków ma wielokąt foremny, którego suma miar kątów wewnętrznych jest równa: a) $720°$, b) $900°$, c) $1260°$, d) $1440°$, e) $1620°$?

3. Wyznacz różnicę między polem koła opisanego na danym wielokącie oraz polem koła wpisanego w ten wielokąt.

a) kwadrat o boku a b) sześciokąt foremny o boku a

Odpowiedzi do zadań

1. a) $135°$
b) $144°$

2. a) 6 **b)** 7 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 11

3. a) $\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\pi$

b) $\pi a^2 - \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\pi$

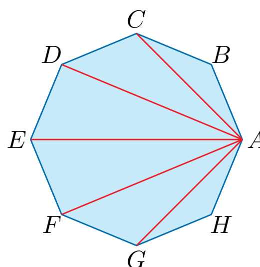
4. Dany jest sześciokąt foremny o boku a i polu P. Promień okręgu opisanego na tym sześciokącie jest równy R, a promień okręgu w niego wpisanego jest równy r. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

a	R	r	P
4 cm	4 cm	$2\sqrt{3}$ cm	$24\sqrt{3}$ cm^2
6 cm	6 cm	$3\sqrt{3}$ cm	$54\sqrt{3}$ cm^2
$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{4}{3}\sqrt[4]{12}$ cm	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{108}$ cm	16 cm^2
$8\sqrt{3}$ cm	$8\sqrt{3}$ cm	12 cm	$288\sqrt{3}$ cm^2

5. a) Podaj liczbę przekątnych sześciokąta foremnego.

D b) Uzasadnij, że liczba przekątnych dowolnego n-kąta jest równa $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

6. Przekątne ośmiokąta foremnego poprowadzone z jednego wierzchołka podzieliły ten ośmiokąt na sześć trójkątów (rysunek obok). Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



D **7.** Uzasadnij, że pole ośmiokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równe $2\sqrt{2}$.

D **8.** Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na ośmiokącie foremnym o boku a jest równy $\frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

D **9.** Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w ośmiokąt foremny o boku a jest równy $\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$.

D **10.** Dany jest n-kąt foremny o boku długości 2 cm. Uzasadnij, że różnica między polem koła opisanego na tym wielokącie i polem koła wpisanego w ten wielokąt jest równa π cm^2, niezależnie od liczby boków wielokąta.

D **11.** Dany jest wielokąt foremny o boku a. Promień okręgu opisanego na tym wielokącie jest równy R, a promień okręgu wpisanego w ten wielokąt jest równy r. Uzasadnij, że $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$.

D **12.** a) Uzasadnij, że bok n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu R ma długość $2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

b) Uzasadnij, że promień okręgu wpisanego w n-kąt foremny o boku długości a jest równy $\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

5. a) 9

b) Z każdego wierzchołka n-kąta wychodzą $n-3$ przekątne. Zatem liczba przekątnych jest równa:

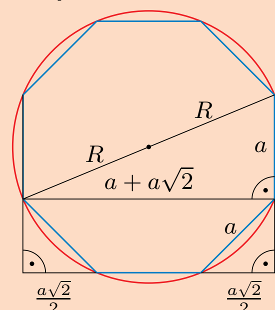
$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

6. $\triangle ABC$ i $\triangle AHG$: 22,5°, 135°, 22,5°
$\triangle ACD$ i $\triangle AGF$: 22,5°, 112,5°, 45°
$\triangle ADE$ i $\triangle AFE$: 22,5°, 90°, 67,5°

7. Ośmiokąt foremny wpisany w okrąg składa się z ośmiu trójkątów równoramiennych o ramieniu długości r i kącie między ramionami 45°. Zatem:

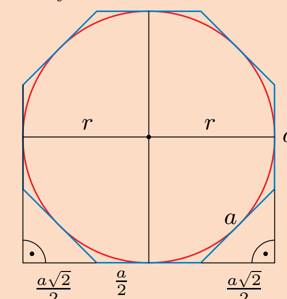
$$P = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$$

8. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$(2R)^2 = a^2 + (a + a\sqrt{2})^2$$
$$4R^2 = a^2(4+2\sqrt{2})$$
$$R^2 = \frac{1}{4}a^2(4+2\sqrt{2})$$
$$R = \frac{1}{2}a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

9. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$$r = \frac{1}{2}a + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$$

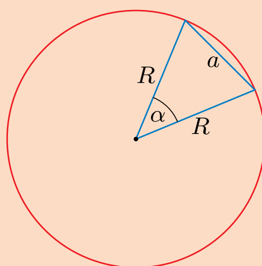
10. Niech r – promień okręgu wpisanego w n-kąt foremny, R – promień okręgu opisanego na n-kącie foremnym.
Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2$$
$$R^2 - r^2 = 1$$
$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi\cdot 1 = \pi$$

11. Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = R^2 - r^2$$
$$\frac{1}{2}a = \sqrt{R^2 - r^2}$$
$$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

12.



$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, czyli $\frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{n}$

a) $\frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin\frac{180^\circ}{n}$, więc $a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$

b) $\frac{r}{\frac{a}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, więc $r = \frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$

Warto wiedzieć

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72°

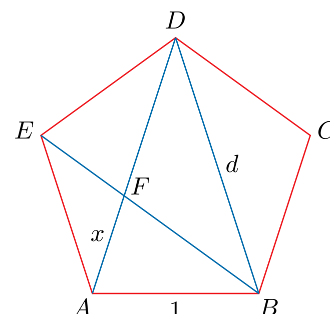
Twierdzenie

Przekątna pięciokąta foremnego o boku 1 ma długość równą $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dowód

Rozważmy pięciokąt foremny $ABCDE$ o boku 1 (rysunek obok). Oznaczmy przez d długość jego przekątnej oraz niech:

$$|FA| = x$$



Trójkąty ABD i FAB są podobnymi trójkątami równoramiennymi o kątach równych: 72°, 72°, 36° (sprawdź). Zatem:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{d}$$

$$dx = 1$$

Trójkąt BFD jest równoramienny (jego kąty są równe 36°, 36°, 108°), więc $|FB| = |FD| = d - x$. W trójkącie FAB mamy: $|FB| = |AB| = 1$, stąd $d - x = 1$. Podstawiamy $x = d - 1$ do równania $dx = 1$ i otrzymujemy:

$$d(d-1) = 1$$

$$d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Przykład

Oblicz $\sin 54°$.

Zauważmy, że $\sphericalangle DCB = 108°$ (rysunek powyżej), zatem:

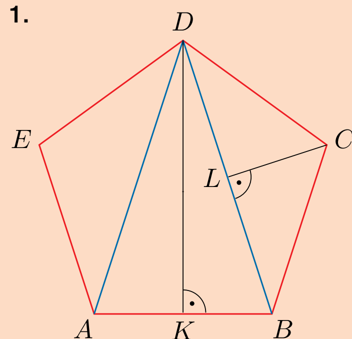
$$\sin 54° = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 18°, 36°, 54°, 72° (rozpatrz trójkąty równoramienne ABD i BCD z rysunku w dowodzie powyżej), a następnie przerysuj do zeszytu przedstawioną obok tabelę i ją uzupełnij.

α	18°	36°	54°	72°
$\sin\alpha$	?	?	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	?
$\cos\alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{tg}\alpha$	?	?	?	?
$\operatorname{ctg}\alpha$	?	?	?	?

Odpowiedzi do zadań

1.



$|DK| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{5}}$

$|CL| = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

α	18°	36°	54°	72°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

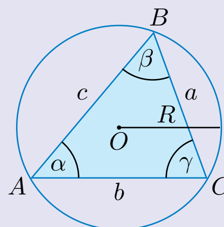
5.10. Twierdzenie sinusów

Przypomnijmy, że **rozwiązaniem trójkąta** nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i miar jego trzech kątów. Jednym z twierdzeń wykorzystywanych do rozwiązywania trójkątów jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie sinusów

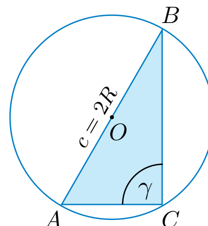
W dowolnym trójkącie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Dowód. Udowodnimy, że $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. (Równości $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ oraz $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ.

1° Kąt γ jest kątem prostym (rysunek po prawej).
Mamy $c = 2R$ oraz $\sin\gamma = 1$, stąd $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek po lewej).
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD. Kąt ABD jest kątem prostym, zatem $\frac{c}{2R} = \sin\varphi$.

Kąty γ i φ są oparte na tym samym łuku, czyli są równe, więc $\frac{c}{2R} = \sin\gamma$. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

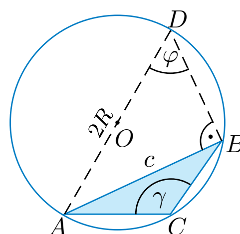
3° Kąt γ jest kątem rozwartym (rysunek poniżej).
Prowadzimy średnicę AD i rozważamy trójkąt ABD.
Kąt ABD jest kątem prostym, zatem:

$$\frac{c}{\sin\varphi} = 2R$$

Suma kątów γ i φ jest równa 180°, stąd:

$$\sin\gamma = \sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$$

Zatem zachodzi równość $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.



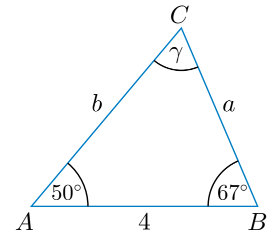
Uwaga. Jeżeli nie zostanie powiedziane, że jest inaczej, będziemy przyjmować, że boki trójkąta: a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów: α, β, γ.

Uczeń:
- stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania trójkątów,
- stosuje twierdzenie sinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym,
- wykorzystuje twierdzenie sinusów w zadaniach na dowodzenie,
- przeprowadza dowód twierdzenia sinusów.

Jeśli dane są dwa kąty i bok trójkąta, to do jego rozwiązania możemy skorzystać z twierdzenia sinusów. Tam, gdzie jest to potrzebne, odpowiednie wartości można odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 384).

Przykład 1

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są kąty $\alpha = 50^\circ$ i $\beta = 67^\circ$ oraz bok $c = 4$.



Obliczamy miarę kąta γ:

$\gamma = 180^\circ - (50^\circ + 67^\circ) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$

Długości boków a i b obliczamy, korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \text{zatem} \quad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{4\sin 50^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 3{,}44,$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad \text{zatem} \quad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{4\sin 67^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 4{,}13.$$

Ćwiczenie 1

a) $\gamma = 75^\circ$, $a \approx 4{,}39$, $b \approx 5{,}38$
b) $\gamma = 45^\circ$, $a = 4\sqrt{2}$, $b \approx 10{,}93$
c) $\beta = 90^\circ$, $a \approx 6{,}43$, $c \approx 7{,}66$
d) $\alpha = 76^\circ$, $b \approx 4{,}81$, $c \approx 2{,}96$



Ćwiczenie 1

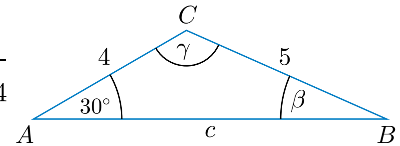
Rozwiąż trójkąt o danych kątach i boku.

a) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 6$
b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 105^\circ$, $c = 8$
c) $\alpha = 40^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $b = 10$
d) $\beta = 69^\circ$, $\gamma = 35^\circ$, $a = 5$

Twierdzenie sinusów pozwala również rozwiązać trójkąt, gdy dane są dwa jego boki i kąt leżący naprzeciw jednego z tych boków.

Przykład 2

Rozwiąż trójkąt ABC (rysunek obok), w którym dane są długości boków $a = 5$ i $b = 4$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$.



Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{4\sin 30^\circ}{5} = 0{,}4$$

Z tablic odczytujemy, że $\beta \approx 24^\circ$,

zatem $\gamma \approx 180^\circ - (30^\circ + 24^\circ) = 126^\circ$.

$\sin\beta = 0{,}4$ również dla $\beta \approx 156^\circ$, ale tę możliwość odrzucamy, gdyż $156^\circ + 30^\circ > 180^\circ$.

Z równości $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ obliczamy długość boku c:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{5\sin 126^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{5 \cdot 0{,}81}{0{,}5} = 8{,}1$$

$\sin 126^\circ = \sin(180^\circ - 54^\circ) = \sin 54^\circ \approx 0{,}81$

Ćwiczenie 2

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 7,\ b = 6,\ \alpha = 80^\circ$

b) $a = 3,\ b = 6,\ \alpha = 30^\circ$

c) $b = 9,\ c = 10,\ \gamma = 45^\circ$

d) $b = 5,\ c = 4,\ \beta = 60^\circ$

D Przykład 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach $a = 3$, $b = 9$ i kącie $\alpha = 30^\circ$.

Załóżmy, że taki trójkąt istnieje. Wówczas na podstawie twierdzenia sinusów prawdziwa jest równość:

$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{\sin \beta}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\sin \beta = 9 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{3}{2} > 1$$

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że taki trójkąt nie istnieje.

D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt spełniający podane warunki.

a) $a = 3,\ b = 2,\ \beta = 60^\circ$

b) $a = 2,\ b = 4,\ \alpha = 45^\circ$

Przykład 4

Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 5$ i $b = 8$ oraz kącie $\alpha = 30^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta β:

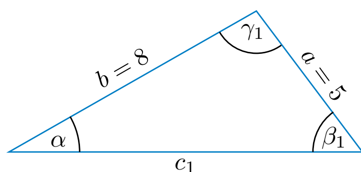
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$ Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = 0{,}8$$

Z tablic (str. 384) odczytujemy, że $\sin \beta = 0{,}8$ dla kąta ostrego $\beta_1 \approx 53^\circ$. Zauważmy, że $\sin \beta = 0{,}8$ również dla kąta $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 127^\circ$. Kąt β_2 spełnia warunki zadania, gdyż $127^\circ + 30^\circ < 180^\circ$.

Zatem warunki zadania spełniają dwa trójkąty:

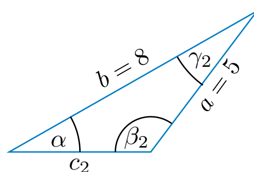
- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_1 \approx 53^\circ$, $\gamma_1 \approx 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ) = 97^\circ$



Z równania $\frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha} \approx 9{,}9$$

- trójkąt o kątach: $\alpha = 30^\circ$, $\beta_2 \approx 127^\circ$, $\gamma_2 \approx 180^\circ - (30^\circ + 127^\circ) = 23^\circ$



Z równania $\frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{a}{\sin \alpha}$ obliczamy:

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha} \approx 3{,}9$$

Ćwiczenie 2

a) $\beta \approx 57{,}5^\circ$, $\gamma \approx 42{,}5^\circ$, $c \approx 4{,}8$

b) $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $c = 3\sqrt{3}$

c) $\beta \approx 39{,}5^\circ$, $\alpha \approx 95{,}5^\circ$, $a \approx 14{,}08$

d) $\gamma \approx 44^\circ$, $\alpha \approx 76^\circ$, $a \approx 5{,}6$

Ćwiczenie 3

a) $\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin 60^\circ}$, czyli $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{\frac{27}{16}} > 1$, zatem taki trójkąt nie istnieje.

b) $\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin \beta}$, czyli $\sin \beta = \sqrt{2} > 1$, zatem taki trójkąt nie istnieje.

Ćwiczenie 4

a) $\beta_1 \approx 56{,}5^\circ$, $\beta_2 \approx 123{,}5^\circ$, $\gamma_1 \approx 93{,}5^\circ$, $\gamma_2 \approx 26{,}5^\circ$, $c_1 \approx 6$, $c_2 \approx 2{,}7$

b) $\beta_1 \approx 62^\circ$, $\beta_2 \approx 118^\circ$, $\gamma_1 \approx 73^\circ$, $\gamma_2 \approx 17^\circ$, $c_1 \approx 10{,}8$, $c_2 \approx 3{,}3$

c) $\beta_1 \approx 74^\circ$, $\beta_2 \approx 106^\circ$, $\gamma_1 \approx 46^\circ$, $\gamma_2 \approx 14^\circ$, $c_1 \approx 7{,}5$, $c_2 \approx 2{,}5$

d) $\alpha \approx 21^\circ$, $\gamma \approx 114^\circ$, $c \approx 2{,}6$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 45^\circ$
b) $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 15^\circ$

2. a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ **b)** $6\sqrt{2}$

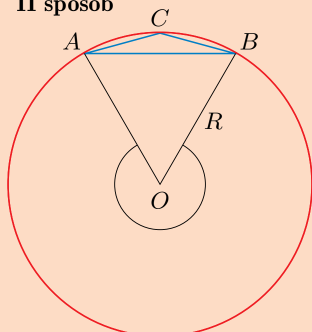
c) I sposób

$\alpha = \beta = 15^\circ$,

$\gamma = 180^\circ - 2\alpha = 150^\circ$

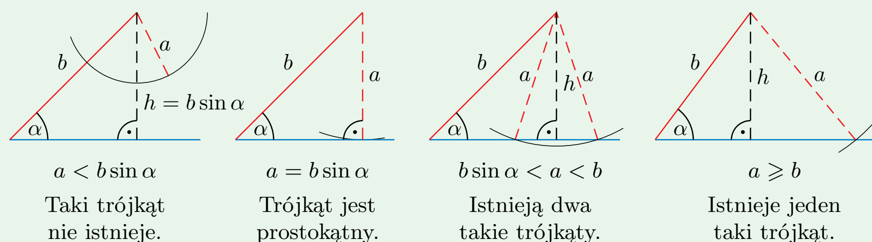
$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{c}{2\sin 150^\circ} =$
$= \frac{c}{2\sin 30^\circ} = c$

II sposób



Kąt rozwarty AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany $ACB = 150^\circ$, czyli kąt rozwarty $AOB = 300^\circ$, stąd kąt ostry $AOB = 60^\circ$, czyli trójkąt AOB jest równoboczny, zatem $|AB| = R$.

Rozpatrzmy dwa odcinki a i b oraz kąt ostry α, z których chcemy zbudować trójkąt taki, że kąt α będzie leżał naprzeciwko boku a. Może wówczas zachodzić jedna z poniższych sytuacji:



$a < b\sin\alpha$	$a = b\sin\alpha$	$b\sin\alpha < a < b$	$a \geqslant b$
Taki trójkąt nie istnieje.	Trójkąt jest prostokątny.	Istnieją dwa takie trójkąty.	Istnieje jeden taki trójkąt.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 3$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$
b) $a = 8$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$
c) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 60^\circ$
d) $a = 1$, $b = 2$, $\beta = 45^\circ$

Zadania

1. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

a) $|AB| = \sqrt{6}$, $|BC| = 3$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$
b) $|AC| = 3\sqrt{6}$, $|BC| = 9$, $\sphericalangle BAC = 120^\circ$

2. a) Bok trójkąta położony naprzeciw kąta o mierze 120° ma długość 10. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

b) Kąt rozwarty trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 ma miarę 135°. Oblicz długość boku trójkąta położonego naprzeciw tego kąta.

D c) Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 15°. Uzasadnij, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy długości podstawy trójkąta.

3. Rozwiąż trójkąt o danych bokach i kącie.

a) $a = 4$, $b = 6$, $\alpha = 30^\circ$
b) $a = 9$, $b = 10$, $\alpha = 45^\circ$
c) $b = 11$, $c = 12$, $\beta = 60^\circ$
d) $a = 10$, $c = 20$, $\gamma = 150^\circ$

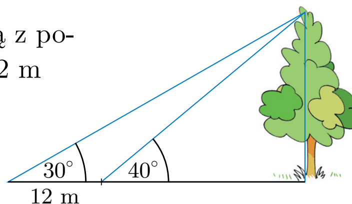
4. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli:

a) $a = 4$, $\alpha = 135^\circ$,
b) $a = 7$, $\beta = 107^\circ$, $\gamma = 43^\circ$,
c) $b = 10$, $\beta = 135^\circ$,
d) $a = 7$, $\alpha = 120^\circ$,
e) $a = 3$, $\beta = 30^\circ$, $\alpha = 4\gamma$,
f) $c = 11$, $\alpha = \beta = 45^\circ$.

3. a) $c \approx 7{,}85$, $\beta \approx 48{,}5^\circ$, $\gamma \approx 101{,}5^\circ$
lub $c \approx 2{,}48$, $\beta \approx 131{,}5^\circ$, $\gamma \approx 18{,}5^\circ$
b) $c \approx 12{,}63$, $\beta \approx 52^\circ$, $\gamma \approx 83^\circ$
lub $c \approx 1{,}55$, $\beta \approx 128^\circ$, $\gamma \approx 7^\circ$
c) $a \approx 9{,}59$, $\alpha \approx 49^\circ$, $\gamma \approx 71^\circ$
lub $a \approx 2{,}42$, $\alpha \approx 11^\circ$, $\gamma \approx 109^\circ$
d) $b \approx 10{,}7$, $\alpha \approx 14{,}5^\circ$, $\beta \approx 15{,}5^\circ$

4. a) $2\sqrt{2}$ **b)** 7
c) $5\sqrt{2}$ **d)** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$
e) $\sqrt{3}$ **f)** 5,5

5. W momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt 30°, cień drzewa jest o 12 m dłuższy niż wtedy, gdy tworzą one kąt 40°. Oblicz wysokość drzewa.



6. Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

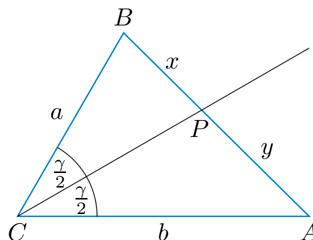
a) $b = 10$, $\alpha = 30°$, $\beta = 75°$,
b) $b = 6$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 75°$,
c) $a = 12$, $b = 16$, $\alpha = 30°$,
d) $b = 6$, $c = 5$, $\beta = 20°$,
e) $a = 5$, $c = 7$, $\gamma = 110°$,
f) $a = 6$, $c = 3$, $\gamma = 40°$.

7. Dane są kąty α i β trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 6 cm. Oblicz obwód trójkąta, jeśli:

a) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, b) $\alpha = 30°$, $\beta = 135°$.

D **8.** Półprosta CP jest dwusieczną kąta γ w trójkącie ABC (rysunek obok). Korzystając z twierdzenia sinusów, udowodnij równość:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$



D **9.** Dany jest trójkąt o bokach a, b, c oraz kątach α, β, γ. Wyprowadź wzór:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

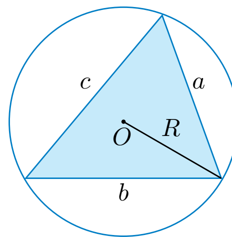
korzystając z tego, że pole dowolnego trójkąta wyraża każda z równości:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad P = \frac{1}{2}ac\sin\beta, \quad P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

D **10.** Uzasadnij, korzystając z twierdzenia sinusów, że pole dowolnego trójkąta o bokach a, b, c wyraża się za pomocą wzoru:

$$P = \frac{abc}{4R}$$

gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

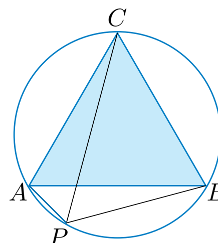


D **11.** Niech α i β będą kątami ostrymi trójkąta takimi, że $\alpha > \beta$. Uzasadnij, że bok a jest dłuższy od boku b.

12. W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC (rysunek obok). Punkt P należy do łuku $\widehat{AB}$.

a) Oblicz sinus kąta PAC, jeśli $|AC| = 6$ oraz $|PC| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$

D b) Wykaż, że $|AP| + |BP| = |CP|$.



5. około 22,2 m

6. **a)** $a \approx 5{,}18$, $c = 10$, $\gamma = 75°$
b) $a \approx 4{,}9$, $c \approx 6{,}7$, $\beta = 60°$
c) $c \approx 22{,}83$, $\beta \approx 42°$, $\gamma \approx 108°$ lub $c \approx 4{,}99$, $\beta \approx 138°$, $\gamma \approx 12°$
d) $a \approx 10{,}35$, $\alpha \approx 143{,}5°$, $\gamma \approx 16{,}5°$
e) $b \approx 3{,}5$, $\alpha \approx 42°$, $\beta \approx 28°$
f) Taki trójkąt nie istnieje.

7. Informacja do zadania:
$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,
$\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
a) $3(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \approx \approx 30{,}47$ [cm]
b) $3(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}) \approx 17{,}59$ [cm]

8. Niech $\sphericalangle BPC = \alpha$, $\sphericalangle APC = 180° - \alpha$.
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, czyli $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha} = \frac{x}{a}$
$\frac{b}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{y}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, czyli $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha} = \frac{y}{b}$
Zatem $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

9. $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
$b\sin\gamma = c\sin\beta$,
czyli $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
$\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$
$a\sin\beta = b\sin\alpha$,
czyli $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$
Zatem $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

10. $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$
$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$
$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = = \frac{abc}{4R}$

11. $\alpha, \beta \in (0°; 90°)$ oraz $\alpha > \beta$,
zatem $\sin\alpha > \sin\beta$, czyli $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > 1$.
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, stąd $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > 1$, zatem $a > b$.

12. **a)** $\sin\sphericalangle PAC = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
b) Z warunków zadania $|AB| = |BC| = |CA|$.
Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $APBC$, mamy:
$|CP| \cdot |AB| = |AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |CA|$.
Zatem $|CP| = |AP| + |BP|$.

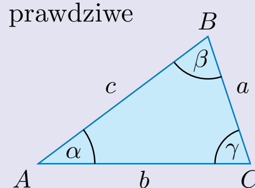
Uczeń:
- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów,
- przeprowadza dowód twierdzenia cosinusów.

5.11. Twierdzenie cosinusów (1)

Twierdzenie cosinusów

Dla dowolnego trójkąta (oznaczenia jak na rysunku) prawdziwe są następujące zależności:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

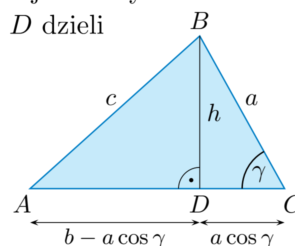


Dowód. Udowodnimy zależność $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. (Pozostałe dwie zależności dowodzi się analogicznie). Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt γ. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 1.).

1° Kąt γ jest kątem prostym, czyli trójkąt ABC jest prostokątny.
Wówczas $\cos\gamma = 0$ i równość przybiera postać $c^2 = a^2 + b^2$ – jest ona prawdziwa na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

2° Kąt γ jest kątem ostrym (rysunek poniżej).
Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że $\sphericalangle BAC$ jest ostry.
Z wierzchołka B opuszczamy wysokość h. Punkt D dzieli bok AC na dwa odcinki o długościach:

$$|DC| = a\cos\gamma, \quad |AD| = b - a\cos\gamma$$



Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów CBD oraz ABD i otrzymujemy odpowiednio:

$$h^2 = a^2 - (a\cos\gamma)^2$$

oraz:

$$h^2 = c^2 - (b - a\cos\gamma)^2$$

Zatem:

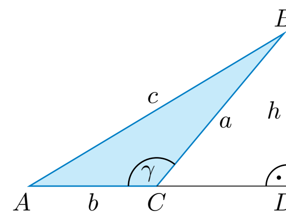
$$c^2 - (b - a\cos\gamma)^2 = a^2 - (a\cos\gamma)^2$$
$$c^2 - b^2 + 2ab\cos\gamma - a^2\cos^2\gamma = a^2 - a^2\cos^2\gamma$$

i ostatecznie $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

D **Ćwiczenie 1**

Udowodnij, że $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ w przypadku, gdy $\gamma > 90°$ (rysunek obok).

Wskazówka. Zauważ, że $|CD| = a\cos(180° - \gamma)$, a następnie wyznacz h^2, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCD oraz dla trójkąta BAD.



Ćwiczenie 1

$|CD| = a\cos(180° - \gamma) = -a\cos\gamma$
$h^2 = a^2 - |CD|^2 = a^2 - a^2\cos^2\gamma$
$c^2 = h^2 + (b + |CD|)^2$
$c^2 = a^2 - a^2\cos^2\gamma + (b - a\cos\gamma)^2$
$c^2 = a^2 - a^2\cos^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Multiteka
- Twierdzenie cosinusów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.11

Generator testów i sprawdzianów

D **Ćwiczenie 2**
Uzasadnij, że z twierdzenia cosinusów wynika twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 1
Rozwiąż trójkąt o bokach $a = 2\sqrt{3}$ i $b = 6$ oraz kącie $\gamma = 30^\circ$.

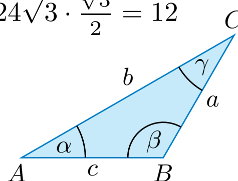
Aby obliczyć długość boku c, korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 12 + 36 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

Stąd $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Zatem jest to trójkąt równoramienny o kątach:
$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.



Ćwiczenie 3
Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC, jeśli:

a) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60^\circ$,
b) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 150^\circ$,
c) $a = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\beta = 45^\circ$,
d) $b = 3$, $c = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$.

Twierdzenie cosinusów pozwala również wyznaczyć kąty trójkąta, gdy dane są długości wszystkich jego boków.

Przykład 2
Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach: $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3\sqrt{10}$.

Wyznaczamy miarę kąta γ:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

Stąd:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{36+18-90}{36\sqrt{2}} = -\frac{36}{36\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $\gamma = 135^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta α:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

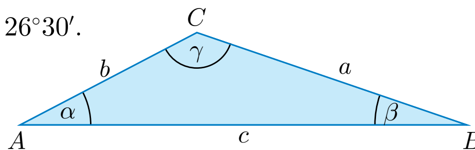
Stąd:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{18+90-36}{18\sqrt{20}} = \frac{72}{36\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}8944$$

Z tablic (str. 384) odczytujemy: $\alpha \approx 26^\circ 30'$.

Wyznaczamy miarę kąta β:

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \approx 18^\circ 30'$



Ćwiczenie 3

a) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\cos 60^\circ =$
$= 39$
$c = \sqrt{39}$

b) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\cos 150^\circ$
$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$c^2 = 74 + 35\sqrt{3}$
$c = \sqrt{74 + 35\sqrt{3}}$

c) $b^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 +$
$-2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}\cos 45^\circ = 5$
$b = \sqrt{5}$

d) $a^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 +$
$-2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2}\cos 135^\circ$
$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) =$
$= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$a^2 = 29$
$a = \sqrt{29}$

Ćwiczenie 2
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa: Jeżeli w trójkącie suma kwadratów długości dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.
Załóżmy, że w trójkącie zachodzi następująca zależność:
$c^2 = a^2 + b^2$, gdzie c jest najdłuższym bokiem.
Z twierdzenia cosinusów mamy: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, stąd $2ab\cos\gamma = 0$,
zatem $\cos\gamma = 0$, czyli $\gamma = 90^\circ$, co oznacza, że trójkąt jest prostokątny.

Ćwiczenie 4

Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a=1,\ b=1,\ c=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ b) $a=\sqrt{2},\ b=2,\ c=1+\sqrt{3}$

Zadania

1. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.

a) $a=4,\ b=\sqrt{3},\ \gamma=30^\circ$
b) $b=5,\ c=3\sqrt{2},\ \alpha=45^\circ$
c) $a=2,\ b=6,\ \gamma=120^\circ$
d) $a=2\sqrt{3},\ c=4,\ \beta=150^\circ$

2. Dane są długości dwóch boków trójkąta ABC: $a=6$ i $b=10$. Oblicz długość boku c, jeśli wiadomo, że $\sin\gamma=\frac{4}{5}$ oraz kąt γ jest:

a) ostry, b) rozwarty.

3. Dane są długości a, b dwóch sąsiednich boków równoległoboku oraz kąt γ wyznaczony przez te boki. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

a) $a=2,\ b=4\sqrt{3},\ \gamma=30^\circ$
b) $a=4,\ b=2\sqrt{2},\ \gamma=45^\circ$
c) $a=5,\ b=3,\ \gamma=60^\circ$
d) $a=6,\ b=8,\ \gamma=120^\circ$

4. Oblicz miarę kąta β trójkąta ABC.

a) $a=5,\ b=\sqrt{19},\ c=3$ b) $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{10},\ c=2$

5. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a=2\sqrt{3},\ b=4\sqrt{3},\ c=6$ b) $a=\sqrt{6},\ b=2\sqrt{3},\ c=\sqrt{3}+3$

6. Wyznacz miary kątów trójkąta o podanych bokach.

a) $a=2,\ b=3,\ c=4$ b) $a=3,\ b=5,\ c=7$

7. a) Jeden z boków trójkąta jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 60°. Oblicz długości tych boków, jeśli wiadomo, że trzeci bok tego trójkąta ma długość 7.

b) Jeden z boków trójkąta jest czterokrotnie dłuższy od drugiego boku, a kąt między nimi zawarty jest równy 120°. Oblicz długości tych boków, jeśli wiadomo, że trzeci bok tego trójkąta ma długość 21.

8. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $8\sqrt{3}$, a kąt BAD jest równy 60°. Przekątna AC ma długość 6 i zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Oblicz obwód tego trapezu.

Ćwiczenie 4

a) $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1+1-2-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma=150^\circ$, $\alpha=\beta=15^\circ$

b) $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+1+2\sqrt{3}+3-2}{2\cdot2(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2+4+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=105^\circ$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sqrt{7}$
b) $\sqrt{13}$
c), d) $2\sqrt{13}$

2. a) 8
b) $4\sqrt{13}$

3. a) $d_1=2\sqrt{7},\ d_2=2\sqrt{19}$
b) $d_1=2\sqrt{2},\ d_2=2\sqrt{10}$
c) $d_1=\sqrt{19},\ d_2=7$
d) $d_1=2\sqrt{13},\ d_2=2\sqrt{37}$

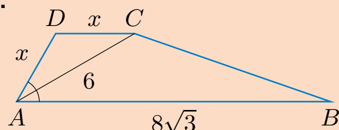
4. a) 60°
b) 135°

5. a) $\alpha=30^\circ,\ \beta=90^\circ,\ \gamma=60^\circ$
b) $\alpha=30^\circ,\ \beta=45^\circ,\ \gamma=105^\circ$

6. a) $\cos\alpha=\frac{7}{8},\ \cos\beta=\frac{11}{16}$
$\alpha\approx29^\circ,\ \beta\approx46{,}5^\circ,$
$\gamma\approx104{,}5^\circ$
b) $\cos\alpha=\frac{13}{14},\ \cos\beta=\frac{11}{14}$
$\alpha\approx22^\circ,\ \beta\approx38^\circ,$
$\gamma\approx120^\circ$

7. a) $\sqrt{7},\ 3\sqrt{7}$
b) $\sqrt{21},\ 4\sqrt{21}$

8.



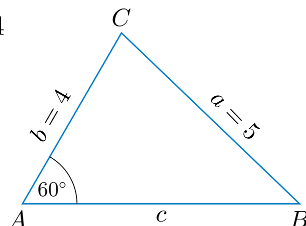
$\sphericalangle DAC=\sphericalangle CAB=30^\circ$
$\sphericalangle ACD=\sphericalangle CAB$
(kąty naprzemianległe)
Zatem trójkąt ACD jest równoramienny, czyli
$|AD|=|DC|=x$ oraz
$\sphericalangle ADC=120^\circ$.
Z twierdzenia cosinusów:
$6^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cos120^\circ$
$x=2\sqrt{3}$
$|CB|^2=6^2+(8\sqrt{3})^2+$
$-2\cdot6\cdot8\sqrt{3}\cos30^\circ=$
$=36+192-144=84$
$|CB|=2\sqrt{21}$
$Ob=8\sqrt{3}+2\cdot2\sqrt{3}+2\sqrt{21}=$
$=12\sqrt{3}+2\sqrt{21}$

5.12. Twierdzenie cosinusów (2)

Aby rozwiązać trójkąt, gdy mamy dane długości jego dwóch boków i miarę kąta położonego naprzeciwko jednego z nich, możemy skorzystać z twierdzenia sinusów lub postąpić tak, jak w przykładzie poniżej.

Przykład 1

W trójkącie ABC (rysunek obok) dane są $|AC| = 4$ i $|BC| = 5$ oraz $\sphericalangle BAC = 60°$. Oblicz długość boku AB.



Korzystamy ze wzoru $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$:

$$25 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 60°$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$c^2 - 4c - 9 = 0$$

$$\Delta = 16 + 36 = 52, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$$

Stąd:

$$c = \frac{4-2\sqrt{13}}{2} = 2 - \sqrt{13} < 0 \text{ (sprzeczność)}$$

lub

$$c = \frac{4+2\sqrt{13}}{2} = 2 + \sqrt{13}$$

Zatem bok AB ma długość równą $2 + \sqrt{13}$.

Zauważ, że równanie $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, gdzie nieznany jest bok c, może mieć dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub nie mieć rozwiązań.

Ćwiczenie 1

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC, jeśli:

a) $|AC| = 8$, $|BC| = 7$, $\sphericalangle BAC = 60°$,

b) $|AC| = 5$, $|AB| = 8$, $\sphericalangle ABC = 45°$.

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 2\sqrt{6}$ i $|BC| = 2\sqrt{3}$ oraz miara kąta BAC równa $30°$. Rozwiąż ten trójkąt.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż trójkąt ABC, jeśli:

a) $b = 6$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = 45°$,

b) $a = 4$, $b = 2 + 2\sqrt{3}$, $\gamma = 30°$,

c) $a = 3 + \sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $\beta = 60°$,

d) $a = 2\sqrt{7}$, $c = 2$, $\alpha = 120°$.

Ćwiczenie 3

c) $(3\sqrt{2})^2 = (3+\sqrt{3})^2 + c^2 - 2(3+\sqrt{3}) \cdot c \cdot \cos 60°$

$c^2 - (3+\sqrt{3})c + 6(\sqrt{3}-1) = 0$

$\Delta = 9(4 - 2\sqrt{3})$

$c_1 = 3 - \sqrt{3}$, $c_2 = 2\sqrt{3}$

$\cos\alpha_1 = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\alpha_1 = 105°$, $\alpha_2 = 75°$, $\gamma_1 = 15°$, $\gamma_2 = 45°$

d) $(2\sqrt{7})^2 = b^2 + 2^2 - 2b \cdot 2 \cdot \cos 120°$

$b^2 + 2b - 24 = 0$, czyli $b = 4$

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\beta = 41°$, $\gamma = 19°$

Uczeń:

- wskazuje najmniejszy (największy) kąt w trójkącie, gdy dane są długości boków trójkąta,
- bada, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny,
- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań,
- stosuje twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Ćwiczenie 1

a) $7^2 = 8^2 + |AB|^2 +$
$-2 \cdot 8 \cdot |AB| \cdot \cos 60°$

$|AB|^2 - 8|AB| + 15 = 0$

$|AB| = 3$ lub $|AB| = 5$

b) $5^2 = 8^2 + |BC|^2 +$
$-2 \cdot 8 \cdot |BC| \cdot \cos 45°$

$|BC|^2 - 8\sqrt{2} \cdot |BC| + 39 = 0$

$\Delta < 0$

Taki trójkąt nie istnieje.

Ćwiczenie 2

$c = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$, $\beta = 135°$, $\gamma = 15°$ lub $c = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\beta = 45°$, $\gamma = 105°$

Ćwiczenie 3

a) $6^2 = a^2 + (6\sqrt{2})^2 +$
$-2a \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 45°$

$a = 6$, $\alpha = 45°$, $\gamma = 90°$

b) $c^2 = 4^2 + (2 + 2\sqrt{3})^2 +$
$-2 \cdot 4 \cdot (2 + 2\sqrt{3})\cos 30° = 8$

$c = 2\sqrt{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, czyli

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos\alpha = \frac{(4+8\sqrt{3}+12)+8-16}{4\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zatem $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$.

Multiteka

- Twierdzenie cosinusów

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 5.12

Generator testów i sprawdzianów

Twierdzenie

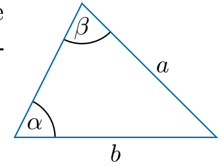
W trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Dowód

Niech α będzie kątem ostrym. Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt β.

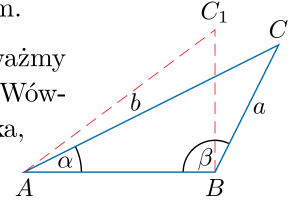
1° Kąt β jest kątem ostrym (rysunek obok). Załóżmy, że $\alpha < \beta$, wówczas $\sin\alpha < \sin\beta$, czyli $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < 1$. Na podstawie twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \quad \text{zatem} \quad a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < b$$



2° Kąt β jest kątem prostym. Wówczas β jest największym kątem trójkąta, a przeciwprostokątna jest jego najdłuższym bokiem.

3° Kąt β jest kątem rozwartym (rysunek obok). Rozważmy trójkąt prostokątny ABC_1 taki, że $|BC_1| = |BC|$. Wówczas $a < |AC_1|$ oraz z twierdzenia cosinusów wynika, że $|AC_1| < b$ (gdyż $\cos\beta < 0$). Zatem $a < b$.



Ćwiczenie 4

a) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 2 cm i $2\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę $150°$.

b) Suma miar dwóch kątów trójkąta ostrokątnego jest równa $135°$, a jego dwa dłuższe boki mają długości $3\sqrt{2}$ cm i $(3+\sqrt{3})$ cm. Oblicz długość trzeciego, najkrótszego boku tego trójkąta.

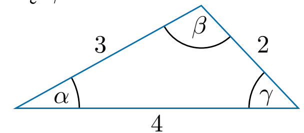
D Przykład 2

Dany jest trójkąt o bokach 2, 3 i 4. Kąt α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a kąt β – największym. Wykaż, że dla kątów tego trójkąta zachodzą zależności: $\sin\beta = 2\sin\alpha$ oraz $\cos\beta = -\frac{2}{7}\cos\alpha$.

Kąt α leży naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, a kąt β – naprzeciwko najdłuższego. Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin\beta}$$

zatem $\sin\beta = 2\sin\alpha$.



Korzystamy z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\alpha = \frac{4^2+3^2-2^2}{2\cdot4\cdot3} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\cos\beta = \frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Zatem $\cos\beta = -\frac{2}{7}\cos\alpha$.

Ćwiczenie 4

a) $c^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot2\cdot2\sqrt{3}\cos150° = 28$

$c = 2\sqrt{7}$ cm

b) $\alpha + \beta = 135°$, α, β – kąty ostre, więc $\alpha > 45°$ i $\beta > 45°$

$c^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{3})^2 - 2\cdot(3\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{3})\cos45° = 12$

$c = 2\sqrt{3}$ cm

D **Ćwiczenie 5**

Dany jest trójkąt o bokach 4, 5 i 6. Wykaż, że $\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha$, gdzie α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, a β – największym.

D **Przykład 3**

a) Wykaż, że trójkąt o bokach długości: $a = 4$, $b = 6$ i $c = 9$ jest rozwartokątny.

Bok c jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt γ jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos\gamma$, korzystając z twierdzenia cosinusów:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4^2+6^2-9^2}{2\cdot4\cdot6} = \frac{-29}{48}$$

Otrzymaliśmy $\cos\gamma < 0$, więc $\gamma \in (90°; 180°)$. Oznacza to, że trójkąt jest rozwartokątny.

b) Wykaż, że trójkąt o bokach długości: $a = 9$, $b = 7$ i $c = 6$ jest ostrokątny.

Bok a jest najdłuższym bokiem trójkąta, zatem kąt α jest jego największym kątem. Obliczamy $\cos\alpha$, korzystając z twierdzenia cosinusów.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{7^2+6^2-9^2}{2\cdot7\cdot6} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Otrzymaliśmy $\cos\alpha > 0$, więc $\alpha \in (0°; 90°)$. Największy kąt trójkąta jest kątem ostrym, co oznacza, że trójkąt jest ostrokątny.

Ćwiczenie 6

Oblicz cosinus kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta o bokach a, b, c. Czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny?

a) $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$
b) $a = 25$, $b = 7$, $c = 24$
c) $a = 10$, $b = 11$, $c = 4$
d) $a = 6$, $b = 20$, $c = 21$

Zadania

1. Oblicz cosinus największego kąta trójkąta o bokach a, b, c. Czy środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży wewnątrz trójkąta?

a) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$
b) $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$
c) $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 1$
d) $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 2$

2. Boki trójkąta mają długości 5, 6 i 7. Oblicz:

a) cosinus kąta leżącego naprzeciwko najdłuższego boku,
b) długość środkowej poprowadzonej do boku o długości 6,
c) promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Ćwiczenie 5

Z twierdzenia sinusów:
$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin\beta}$
Z twierdzenia cosinusów:
$\cos\alpha = \frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{3}{4}$
Zatem $\sin\beta = \frac{3}{2}\sin\alpha =$
$= 2\cdot\frac{3}{4}\sin\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$.

Ćwiczenie 6

a) $\cos\alpha = \frac{1}{7}$, ostrokątny
b) $\cos\alpha = 0$, prostokątny
c) $\cos\beta = -\frac{1}{16}$, rozwartokątny
d) $\cos\gamma = -\frac{1}{48}$, rozwartokątny

Odpowiedzi do zadań

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży wewnątrz trójkąta, gdy trójkąt ten jest ostrokątny, czyli gdy cosinus największego kąta jest dodatni.

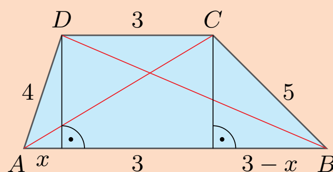
a) $\cos\gamma = \frac{1}{4}$, tak
b) $\cos\alpha = -\frac{29}{48}$, nie
c) $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, nie
d) $\cos\alpha = 0$, nie

2. **a)** $\frac{1}{5}$ **b)** $2\sqrt{7}$ **c)** $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

3. a) $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, $c = 2\sqrt{13}$
lub $\cos\gamma = -\frac{4}{5}$, $c = 6\sqrt{5}$
b) $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, $c = \sqrt{41}$
lub $\cos\gamma = -\frac{1}{3}$, $c = 9$

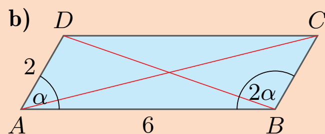
4. a) $\cos\gamma = \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P = \frac{3}{2}$
b) $\cos\gamma = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{55}}{10}$, $P = \frac{\sqrt{11}}{2}$

5. a) $d = 2\sqrt{19}$ cm
b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa:
$4^2 - x^2 = 5^2 - (3 - x)^2$
$x = 0$
Czyli trapez jest prostokątny.
Zatem $|AC| = 5$ cm,
$|BD| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ [cm].

6. a) $d_1^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)$
$d_1 = 6$ cm
$\frac{1}{2}d_2 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$,
czyli $d_2 = 2\sqrt{7}$ cm
b)



$\alpha + 2\alpha = 180°$,
czyli $\alpha = 60°$
$|BD|^2 = 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos 60°$
$|BD| = 2\sqrt{7}$ cm
$|AC|^2 = 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos 120°$
$|AC| = 2\sqrt{13}$ cm

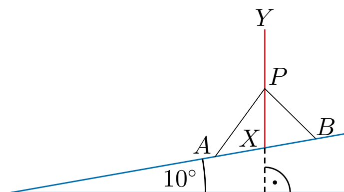
3. Dane są dwa boki a i b pewnego trójkąta oraz jego pole P. Oblicz cosinus kąta wyznaczonego przez te boki, a następnie oblicz długość boku c.
a) $a = 4$, $b = 10$, $P = 12$ b) $a = 5$, $b = 6$, $P = 10\sqrt{2}$

4. Oblicz $\cos\gamma$, $\sin\gamma$ i pole trójkąta o bokach a, b, c.
a) $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{5}$ b) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{3}$

5. a) Oblicz długość przekątnej trapezu równoramiennego, którego dłuższa podstawa ma długość 10 cm, ramię ma długość 6 cm, a kąt między ramieniem i dłuższą podstawą ma miarę 60°.
b) Podstawy trapezu mają długości 3 cm i 6 cm, a jego ramiona są równe 4 cm i 5 cm. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

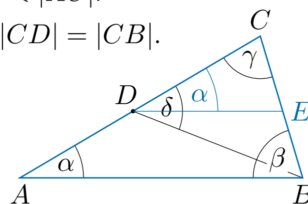
6. a) Oblicz długości przekątnych rombu o obwodzie równym 16 cm, jeśli wiadomo, że cosinus kąta rozwartego tego rombu jest równy $-\frac{1}{8}$.
b) Kąt rozwarty równoległoboku jest dwukrotnie większy od jego kąta ostrego, a jeden z jego boków jest trzykrotnie dłuższy od drugiego boku. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku, jeżeli wiadomo, że jego obwód jest równy 16 cm.


7. Na stoku o kącie nachylenia 10° ustawiono słup XY wysokości 14 m. Jakiej długości są odciągi poprowadzone z punktu P, położonego w środku wysokości słupa, do punktów A i B znajdujących się 6 m od podstawy słupa (rysunek obok)?




8. Przeczytaj podany w ramce szkic dowodu twierdzenia mówiącego, że kąt leżący naprzeciwko dłuższego boku trójkąta jest większy od kąta leżącego naprzeciwko krótszego boku.

Rozpatrujemy trójkąt ABC, w którym $|BC| < |AC|$.
Na boku AC wyznaczamy punkt D taki, że $|CD| = |CB|$.
1. Zauważamy, że $\alpha < \delta$.
2. $\sphericalangle CBD < \beta$ oraz $\delta = \sphericalangle CBD$ (trójkąt BCD jest równoramienny), więc $\alpha < \beta$.



Uzasadnij spostrzeżenie, że w powyższym szkicu dowodu $\alpha < \delta$.

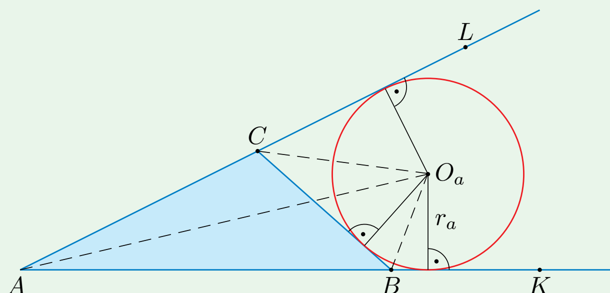
7. $\sphericalangle AXP = 90° + 10° = 100°$
$\sphericalangle BXP = 90° - 10° = 80°$
$|PX| = 7$ m
$|PA|^2 = 6^2 + 7^2 - 2\cdot 6\cdot 7\cdot\cos 100°$
$|PA| \approx 9{,}98$ m
$|PB|^2 = 6^2 + 7^2 - 2\cdot 6\cdot 7\cdot\cos 80°$
$|PB| \approx 8{,}39$ m

8. Niech bok DE będzie równoległy do boku AB.
Wówczas $\sphericalangle CDE = \alpha$ (kąty odpowiadające) i $\sphericalangle CDE < \sphericalangle CDB$, zatem $\alpha < \sigma$.

5.13. Zagadnienia uzupełniające

Okrąg dopisany do trójkąta

Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków trójkąta oraz przedłużeń dwóch pozostałych jego boków.



Środkiem okręgu dopisanego (rysunek powyżej) jest punkt przecięcia dwusiecznych dwóch kątów zewnętrznych trójkąta – kąta CBK i kąta BCL oraz dwusiecznej kąta BAC (uzasadnij, że dwusieczne te przecinają się w jednym punkcie). Dla dowolnego trójkąta ABC istnieją trzy okręgi dopisane, styczne odpowiednio do boków AB, AC i BC.

Jeśli trójkąt ABC o bokach $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ ma pole równe P, to promień r_a okręgu dopisanego do tego trójkąta i stycznego do boku BC jest równy:

$$r_a = \frac{2P}{b+c-a}$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku powyżej. Otrzymujemy:

$$P_{\triangle ACO_a} = \tfrac{1}{2}br_a,\quad P_{\triangle ABO_a} = \tfrac{1}{2}cr_a,\quad P_{\triangle CBO_a} = \tfrac{1}{2}ar_a$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC:

$$P = P_{\triangle ACO_a} + P_{\triangle ABO_a} - P_{\triangle CBO_a} =$$
$$= \tfrac{1}{2}br_a + \tfrac{1}{2}cr_a - \tfrac{1}{2}ar_a = \tfrac{1}{2}r_a(b+c-a)$$

Stąd $r_a = \dfrac{2P}{b+c-a}$.

1. Oblicz promień okręgu dopisanego do trójkąta równobocznego o boku 1.

2. Oblicz promienie okręgów dopisanych do trójkąta prostokątnego o bokach równych 3, 4, 5.

Odpowiedzi do zadań

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 2, 3, 6

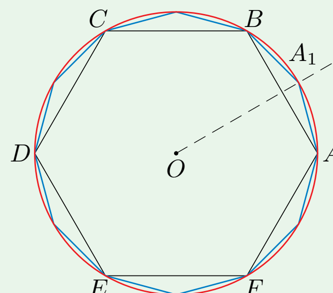
Multiteka

Konstrukcja wybranych wielokątów foremnych

Nie wszystkie n-kąty foremne można skonstruować, korzystając tylko z cyrkla i linijki. Carl F. Gauss udowodnił twierdzenie mówiące, dla jakich liczb n jest to możliwe. Na przykład dla $n < 20$ są to: $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17\}$.

Konstrukcja sześciokąta i dwunastokąta foremnego wpisanych w okrąg

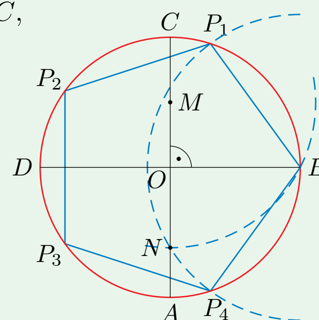
- Na okręgu wybieramy dowolny punkt A i zaczynając od tego punktu, odmierzamy łuki o promieniach równych promieniowi okręgu. Wyznaczone w ten sposób punkty: A, B, C, D, E i F są wierzchołkami sześciokąta foremnego.
- Konstruujemy symetralną odcinka AB. Przecina ona okrąg w punkcie A_1. Odcinek AA_1 jest bokiem dwunastokąta foremnego wpisanego w ten okrąg.
- Następnie, zaczynając od punktu A_1, odmierzamy łuki okręgów o promieniu $|AA_1|$. Punkty przecięcia tych łuków z okręgiem są pozostałymi wierzchołkami dwunastokąta.



3. Skonstruuj kwadrat i ośmiokąt foremny wpisane w dany okrąg.

Konstrukcja pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg

- Rysujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD.
- Wyznaczamy punkt M – środek odcinka OC, gdzie O jest środkiem okręgu.
- Rysujemy łuk okręgu o środku M i promieniu $|BM|$. Łuk ten przecina średnicę AC w punkcie N.
- Odcinek BN ma długość boku szukanego pięciokąta – odkładamy go kolejno na okręgu i otrzymujemy pozostałe wierzchołki pięciokąta: P_1, P_2, P_3 i P_4.



4. Powyżej opisano konstrukcję pięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować pięciokąt foremny, gdy dany jest bok tego pięciokąta.

3. ▪ Konstruujemy dwie prostopadłe średnice AC i BD. Punkty A, B, C i D są wierzchołkami kwadratu.
▪ Konstruujemy dwusieczne kątów wyznaczonych przez średnice. Przecinają one okrąg w czterech punktach, które razem z wierzchołkami A, B, C, D tworzą ośmiokąt foremny.

4. I sposób
▪ Korzystamy z konstrukcji pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg w celu otrzymania kąta $108°$.
▪ Na prostej odkładamy odcinek AB – dany bok pięciokąta.
▪ Konstruujemy (przenosimy) kąt o mierze $108°$ taki, którego wierzchołkiem jest punkt B, a jego ramię zawiera odcinek AB. Następnie podobnie konstruujemy kąt o wierzchołku w punkcie A.
▪ Na otrzymanych ramionach kątów odkładamy odcinki długości $|AB|$ i otrzymujemy wierzchołki C i E.
▪ Rysujemy okrąg o promieniu $|AB|$ i środku w punkcie C oraz okrąg o promieniu $|AB|$ i środku w punkcie E. Wierzchołek D jest jednym z punktów przecięcia tych okręgów.

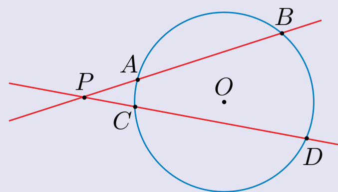
4. II sposób
Niech a – długość danego boku pięciokąta.
▪ Rysujemy okrąg o dowolnym promieniu r_1.
▪ Zgodnie z konstrukcją opisaną w podręczniku konstruujemy pięciokąt wpisany w okrąg o dowolnym promieniu r_1. Długość boku otrzymanego pięciokąta oznaczamy przez a_1.
▪ Niech r będzie promieniem okręgu, w który można wpisać pięciokąt o boku a. Wówczas $\frac{a}{r} = \frac{a_1}{r_1}$. Na podstawie twierdzenia Talesa konstruujemy odcinek o długości r.
▪ Rysujemy okrąg o promieniu r i odkładamy na nim odcinek a – w ten sposób otrzymujemy szukany pięciokąt.

Odcinki stycznych i siecznych

Twierdzenie o siecznych

Jeśli dwie sieczne poprowadzone z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu przecinają okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D, to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Dowód

Czworokąt $ACDB$ jest wpisany w okrąg, stąd $\sphericalangle CAB = 180° - \sphericalangle PDB$.

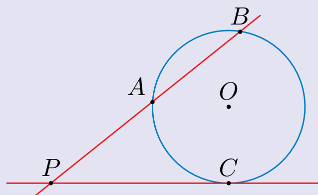
$\sphericalangle PAC = \sphericalangle PDB$, co oznacza, że trójkąty PAC i PDB są podobne.

Z proporcji $\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PB|}$ otrzymujemy równość $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Twierdzenie o stycznej i siecznej

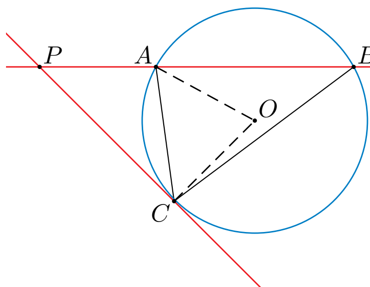
Jeśli przez punkt P przechodzi styczna do okręgu w punkcie C oraz sieczna przecinająca okrąg w punktach A i B, to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$$



D **5.** Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Z punktu P poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie C oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B. Udowodnij twierdzenie o stycznej i siecznej, wykazując kolejno, że:

1. $\triangle PCA \sim \triangle PBC$,
2. $|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$.



6. Oblicz odległość punktu P od środka okręgu o promieniu 2,5 cm, jeśli wiadomo, że:

a) styczna do tego okręgu poprowadzona z punktu P ma z okręgiem punkt wspólny A taki, że $|PA| = 6$ cm,

b) sieczna poprowadzona z punktu P przecina ten okrąg w punktach C i D takich, że $|PC| = 2$ cm i $|PD| = 5$ cm.

5. 1. $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$ (kąt między styczną a cięciwą okręgu, str. 237)
$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA$, więc trójkąty PCA i PBC są podobne (z cechy KKK).
2. Zatem $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PC|}$, czyli $|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$.

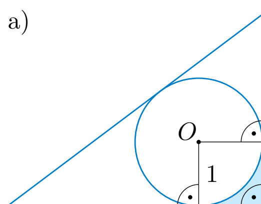
6. **a)** 6,5 cm
b) $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm

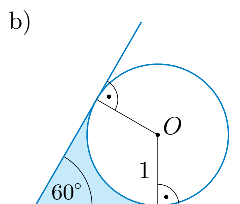


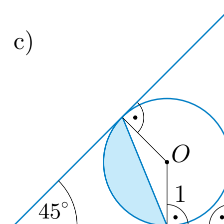
Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

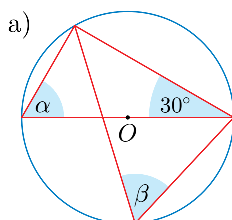
1. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.

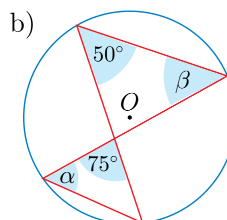
a) 

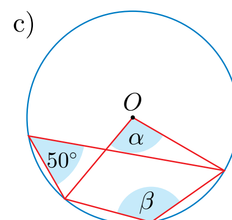
b) 

c) 

2. Wyznacz miary kątów α i β.

a) 

b) 

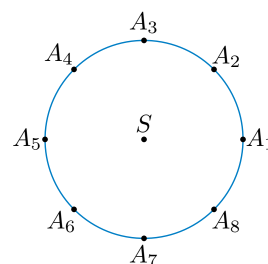
c) 

3. Odcinek AC jest średnicą okręgu o promieniu 2. Cięciwa AB tego okręgu ma długość $2\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B oraz miarę kąta między cięciwą BC a styczną do okręgu w punkcie C.

4. Punkty: $A_1, A_2, \ldots, A_8$ dzielą okrąg na 8 łuków o równej długości (rysunek obok). Wyznacz miarę kąta między cięciwą:

a) A_1A_2 a styczną do okręgu w punkcie A_1,

b) A_3A_8 a styczną do okręgu w punkcie A_8.

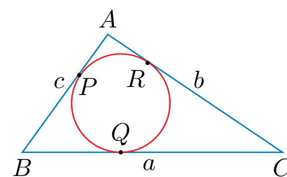


5. Oblicz długość okręgu wpisanego w trójkąt:

a) prostokątny równoramienny, którego wysokość opuszczona na przeciwprostokątną jest równa 3,

b) o bokach długości 20, 21 i 29.

6. W trójkąt o bokach: $a = 16$, $b = 13$ i $c = 9$ wpisano okrąg (rysunek obok). Oblicz długości odcinków: AP, BQ i CR.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $1 - \frac{\pi}{4}$
b) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
c) $\frac{3}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. a) $\alpha = \beta = 60^\circ$
b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 55^\circ$
c) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 130^\circ$

3. 60°, 30°

4. a) 22,5° **b)** 67,5°

5. a) $r = \frac{2P}{a+b+c}$
$r = 3(\sqrt{2} - 1)$
$l = 6\pi(\sqrt{2} - 1)$
b) $P = \sqrt{35 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 6} = 210$
$r = 6$
$l = 12\pi$

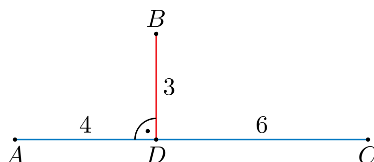
6. Wprowadźmy następujące oznaczenia:
$|AP| = |AR| = x$, $|BP| = |BQ| = y$, $|CR| = |CQ| = z$.
Wówczas:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x + z = 13 \\ y + z = 16 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 10 \end{cases}$$

Zatem $|AP| = 3$, $|BQ| = 6$, $|CR| = 10$.

D **7.** Wykaż, że suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa sumie średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt i okręgu na nim opisanego.

8. Oblicz promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, D oraz promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C (rysunek obok). Oblicz odległość między środkami tych okręgów.



9. W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną podzielił ją na odcinki długości 6 i 9. Oblicz pole tego trójkąta oraz promień wpisanego okręgu.

10. Okrąg o promieniu 1 cm jest wpisany w trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

11. Jeden z boków trójkąta wpisanego w okrąg jest jego średnicą i ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wiadomo, że:

a) stosunek długości jego pozostałych boków jest równy $\frac{1}{3}$,

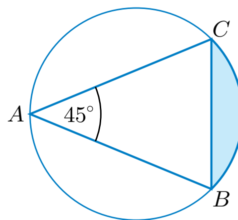
b) jest on równoramienny.

12. Równoramienny trójkąt ABC o kącie między ramionami 45° jest wpisany w okrąg o promieniu 8 (rysunek obok). Oblicz:

a) długości łuków $\widehat{AB}$ i $\widehat{BC}$,

b) pole zacieniowanego odcinka koła,

c) obwód trójkąta ABC.



Zestaw II

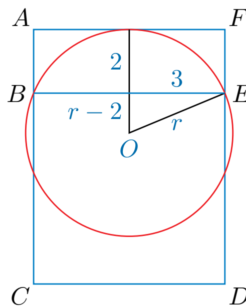
1. Dany jest równoległobok o bokach a i $2a$ oraz kącie ostrym 30°. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

2. Bok kwadratu $BCDE$ ma długość 6 (rysunek obok), a przekątna prostokąta $ACDF$ ma długość 10. Oblicz promień okręgu, którego łukiem jest $\widehat{BE}$.

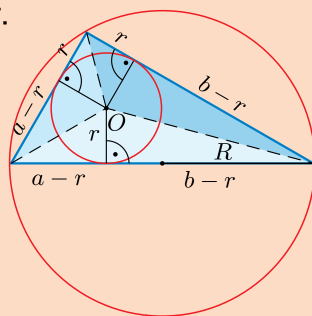
3. Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe 5 i 3. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trapezie, jeśli wiadomo, że jego:

a) wysokość jest równa 3,

b) kąt ostry ma miarę 30°.



7.



Zauważmy, że:
$a - r + b - r = 2R$
Zatem $a + b = 2R + 2r$.

8. Promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, D: 2,5

Promień okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C: $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

Odległość między środkami okręgów: 5

9. $P = 54$, $r = 3$

10. $\frac{10}{3}$ cm

11. **a)** 3,75 cm^2 **b)** 6,25 cm^2

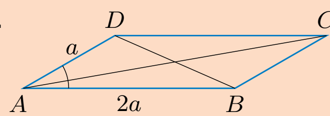
12. **a)** 6π, 4π

b) $16(\pi - 2)$

c) $8(\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}+2})$

Zestaw II

1.



$|DB|^2 = a^2 + (2a)^2 +$
$-2 \cdot a \cdot 2a \cos 30° =$
$= 5a^2 - 2\sqrt{3}a^2$
$|DB| = a\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$
$\sphericalangle ADC = 150°$,
$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$|AC| = a\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$

2. Niech r – promień okręgu. Zauważmy, że $|AC| = 8$, $|AB| = 2$.
Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $(r-2)^2 + 3^2 = r^2$. Stąd $r = 3{,}25$.

3. **a)** $\frac{5\sqrt{10}}{6}$

b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

4. **a)** $32(\sqrt{2}-1)$ cm^2 **b)** $4\sqrt{2}$ cm^2

5. **a)** $Ob = 2(9+\sqrt{21})$
$P = 20\sqrt{3}$
b) $Ob = 2(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$,
$P = 4(1+\sqrt{3})$

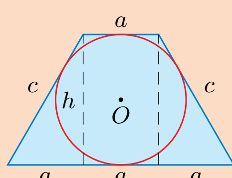
6. **a)** $|ED| = 20$ m
$|EA| = 20\sqrt{3}$ m
$|BF| = 15$ m
$|FC| = 15\sqrt{3}$ m
$|GD| = (15\sqrt{3}-20)$ m
$|GC| = (65+20\sqrt{3})$ m
$P_{AED} = 200\sqrt{3}$ m^2
$P_{BFC} = \frac{225}{2}\sqrt{3}$ m^2
$P_{DGC} = (\frac{575}{2}\sqrt{3}-200)$ m^2
$P_{EFCG} = (975\sqrt{3}+900)$ m^2
$P_{ABCD} = (375\sqrt{3}+1100)$ m^2
$P_{ABCD} \approx 1750$ m^2
b) $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot$
$\cdot \sin 150^\circ = 450$ m^2
Z twierdzenia cosinusów:
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 +$
$-2|AB|\cdot|BC|\cos 150^\circ =$
$= 3600 + 900 - 2\cdot 1800\cdot$
$\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 900(5+2\sqrt{3})$
$|AC| = 30\sqrt{5+2\sqrt{3}}$
$\cos \sphericalangle ADC =$
$= \frac{|AD|^2+|DC|^2-|AC|^2}{2|AD|\cdot|DC|} =$
$= \frac{2500+1600-900(5+2\sqrt{3})}{4000} =$
$= -\frac{2+9\sqrt{3}}{20}$
$\sin \sphericalangle ADC =$
$= \sqrt{1-\cos^2 \sphericalangle ADC} =$
$= \frac{\sqrt{153-36\sqrt{3}}}{20}$
$P_{ADC} = \frac{1}{2}|AD|\cdot|CD|\cdot$
$\cdot \sin \sphericalangle ADC =$
$= 50\sqrt{153-36\sqrt{3}}$ m^2
$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} \approx$
≈ 926 m^2

7. $Ob = 2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})$ cm
$d_2 = 2\sqrt{8+\sqrt{3}}$ cm

8. $3\sqrt{5}$

9. **a)** 10 cm^2 **b)** 288 cm^2

10.

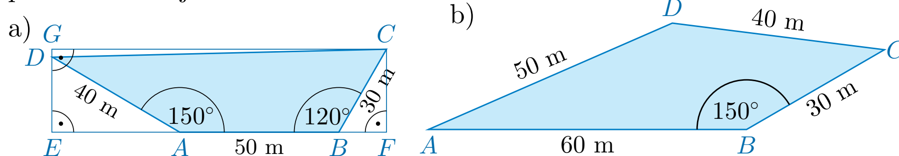


$2c = a + 3a$, czyli $c = 2a$
$h^2 + a^2 = (2a)^2$
$h = a\sqrt{3}$

4. Oblicz pole ośmiokąta foremnego:
a) opisanego na kole o polu równym 4π cm^2,
b) którego najkrótsza przekątna ma długość 2 cm.

5. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC, jeśli:
a) $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$,
b) $b = 4$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

6. Działka budowlana ma kształt nieregularnego czworokąta. Wyniki pomiarów wykonanych przez geodetę są przedstawione na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej działki.



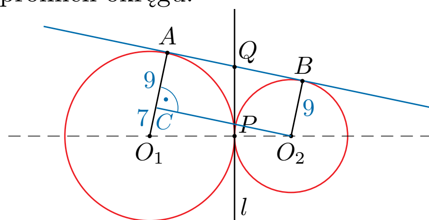
7. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 75°, jeden z jego boków ma długość 4 cm, a krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{4+\sqrt{3}}$ cm. Oblicz obwód i długość drugiej przekątnej tego równoległoboku.

8. Środek okręgu opisanego na trapezie leży na jednej z jego podstaw. Oblicz długości ramion tego trapezu, jeśli jego podstawy mają długości 15 i 9.

9. W trapez równoramienny wpisano okrąg. Oblicz pole tego trapezu, jeśli:
a) jego wysokość ma 2 cm, a suma długości ramion jest równa 10 cm,
b) promień okręgu jest równy 6 cm, a kąt ostry trapezu ma miarę 30°.

10. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości a i $3a$. Ile powinna być równa wysokość tego trapezu, aby można było w niego wpisać okrąg?

D **11.** Uzasadnij, że prosta l na rysunku poniżej dzieli odcinek AB na połowy, a następnie przyjmij, że promień większego okręgu jest równy 16, a mniejszego 9, i oblicz promień okręgu:



a) opisanego na czworokącie O_1PQA,
b) wpisanego w czworokąt O_1PQA.

11. Z twierdzenia o stycznych do okręgu wychodzących z tego samego punktu mamy: $|QB| = |QP|$ oraz $|QA| = |QP|$, zatem $|QA| = |QB|$, czyli prosta l dzieli odcinek AB na połowy.
$|CO_2| = |AB|$ oraz trójkąt O_1CO_2 jest trójkątem prostokątnym, stąd:
$|AB|^2 + 7^2 = (16+9)^2$, $|AB| = 24$, zatem $|AQ| = |BQ| = 12$.
a) Kąty O_1AQ i O_1PQ są kątami prostymi, zatem odcinek O_1Q jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie O_1PQA.
$|O_1Q|^2 = 16^2 + 12^2$, $|O_1Q| = 20$, czyli promień okręgu wynosi $R = 10$.
b) $6\frac{6}{7}$



Przykład

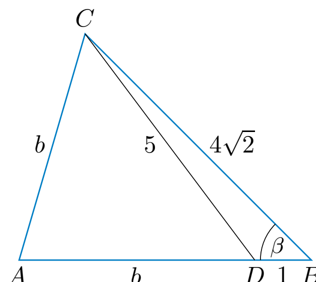
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AD| = |AC|$, $|BD| = 1$, $|CD| = 5$ i $|BC| = 4\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC.

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Aby obliczyć $\cos\beta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:

$$5^2 = (4\sqrt{2})^2 + 1^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\beta$$
$$25 = 33 - 8\sqrt{2}\cos\beta$$
$$8\sqrt{2}\cos\beta = 8$$
$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Obliczamy b, korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC:

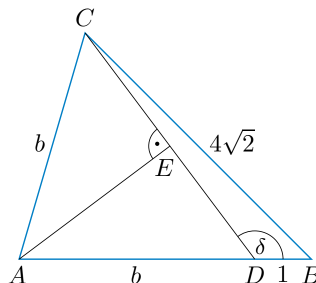
$$b^2 = (b+1)^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (b+1) \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos\beta$$
$$b^2 = b^2 + 2b + 1 + 32 - 8b - 8$$
$$6b = 25$$
$$b = 4\tfrac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

II sposób

Aby obliczyć $\cos\delta$, korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD:

$$(4\sqrt{2})^2 = 5^2 + 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos\delta$$
$$32 = 26 - 10\cos\delta$$
$$10\cos\delta = -6$$
$$\cos\delta = -\frac{3}{5}$$



Zatem:

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta = \frac{3}{5}$$

Prowadzimy wysokość AE trójkąta równoramiennego ACD. Trójkąt ADE jest prostokątny oraz $|ED| = \frac{5}{2}$, więc:

$$\cos\sphericalangle ADC = \cos\sphericalangle ADE = \frac{|ED|}{|AD|}$$

Stąd:

$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{b}, \text{ czyli } b = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = 4\tfrac{1}{6}$$

Obwód trójkąta ADC jest równy $2 \cdot 4\frac{1}{6} + 5 = 13\frac{1}{3}$.

Odpowiedź: $Ob_{\triangle ADC} = 13\frac{1}{3}$

Komentarz

Po przeanalizowaniu sposobów rozwiązania tego zadania warto zaproponować uczniom, aby ułożyli plan postępowania.



Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Dany jest okrąg o promieniu $a\sqrt{2}$. Pole sześciokąta foremnego wpisanego w ten okrąg jest równe:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, **B.** $6a^2$, **C.** $3\sqrt{3}a^2$, **D.** $6\sqrt{3}a^2$.

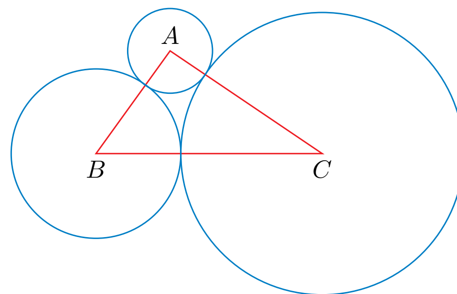
2. Pole wycinka koła o promieniu 4 wyznaczonego przez kąt 54° jest równe:

A. $0{,}6\pi$, **B.** $1{,}2\pi$, **C.** $1{,}8\pi$, **D.** $2{,}4\pi$.

3. Kąty trójkąta równoramiennego mają miary: α, α i 4α, a jego ramię ma długość 2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. $2\sqrt{3}-3$, **B.** $2\sqrt{3}-2$, **C.** $3\sqrt{2}-3$, **D.** $3\sqrt{2}-2$.

4. Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C parami styczne zewnętrznie (rysunek obok). Promienie tych okręgów są odpowiednio równe 3, 6 i 10. Cosinus największego kąta trójkąta ABC wynosi:



A. $-\frac{1}{6}$, **C.** $-\frac{1}{39}$,

B. $-\frac{1}{16}$, **D.** 0.

5. Okrąg o środku w punkcie O_1 i okrąg o środku w punkcie O_2 przecinają się w punktach A i B. Kąt O_1AB ma miarę 60°, a kąt O_2AB – miarę 30°. Jeśli odcinek AB ma długość 4, to promień okręgu opisanego na czworokącie O_1AO_2B jest równy:

A. $\sqrt{3}$, **B.** $\frac{4}{3}\sqrt{3}$, **C.** $2\sqrt{3}$, **D.** $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

6. Na czworokącie o kolejnych kątach α, β, γ i δ opisano okrąg. Jeśli $\delta = 5\alpha$ oraz $\alpha + \beta = 100°$, to:

A. $\gamma = 100°$, **B.** $\gamma = 120°$, **C.** $\gamma = 140°$, **D.** $\gamma = 160°$.

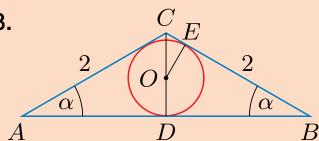
7. Trzy kolejne boki czworokąta mają długości: $2\sqrt{2}$, $4-\sqrt{2}$, $5-\sqrt{2}$. Jeśli w czworokąt ten można wpisać okrąg, to jego czwarty bok ma długość:

A. $\frac{7}{2\sqrt{2}-1}$, **B.** $\frac{7}{2\sqrt{2}+1}$, **C.** $\frac{7}{\sqrt{2}-1}$, **D.** $\frac{7}{\sqrt{2}+1}$.

8. Trapez prostokątny o kącie ostrym 45° opisany jest na okręgu o promieniu równym $\sqrt{2}$. Obwód tego trapezu jest większy od średnicy okręgu o:

A. $8+4\sqrt{2}$, **B.** $8+2\sqrt{2}$, **C.** $6+4\sqrt{2}$, **D.** $6+2\sqrt{2}$.

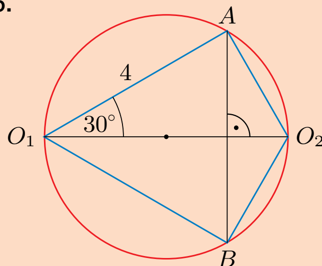
3.



Niech r – promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
Zauważmy, że $\alpha = 30°$, $|DB| = \sqrt{3}$, $|CD| = 1$, zatem $|OC| = 1 - r$.
Trójkąty CDB i CEO są podobne (cecha KKK), zatem $\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|DB|}{|BC|}$, czyli $\frac{r}{1-r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Stąd $r = 2\sqrt{3} - 3$.

4. $|AB| = 9$, $|BC| = 16$, $|AC| = 13$
$16^2 = 9^2 + 13^2 - 2\cdot 9\cdot 13\cos\alpha$
$\cos\alpha = -\frac{1}{39}$

5.

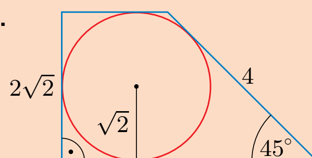


Kąty O_1AO_2 i O_1BO_2 są kątami prostymi.
Kąty proste wpisane w okrąg są oparte na średnicy, zatem odcinek O_1O_2 jest średnicą.
$\frac{|O_1A|}{|O_1O_2|} = \frac{4}{|O_1O_2|} = \cos 30°$,
czyli $|O_1O_2| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,
stąd $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$
$\beta = 100° - \alpha$
$\beta + \delta = 100° - \alpha + 5\alpha =$
$= 100° + 4\alpha = 180°$,
czyli $\alpha = 20°$
$\gamma = 180° - \alpha = 160°$

7. $x + 4 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 5 - \sqrt{2}$
$x = 2\sqrt{2} + 1$
$\frac{7}{2\sqrt{2}-1}\cdot\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{7(2\sqrt{2}+1)}{7} = 2\sqrt{2}+1$

8.



$r = \sqrt{2}$
$Ob = 2(2\sqrt{2} + 4)$
$Ob - 2r = 8 + 2\sqrt{2}$

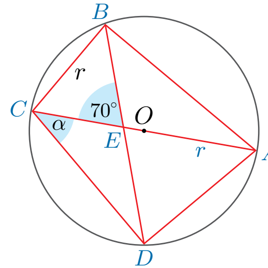


Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Pole wycinka koła o promieniu r wyznaczonego przez kąt $\alpha < 180^\circ$ jest równe P. Ile jest równe pole wycinka koła o promieniu $2r$ wyznaczonego przez kąt 2α?

Zadanie 2 (2 pkt)
Oblicz różnicę między polem koła opisanego na kwadracie o boku $\sqrt{2}+1$ a polem koła wpisanego w ten kwadrat.

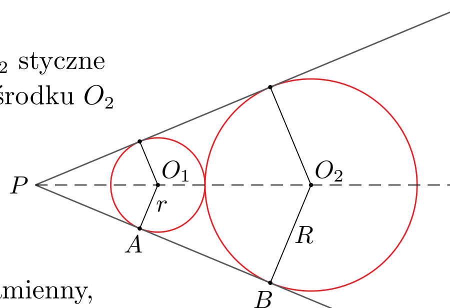
Zadanie 3 (2 pkt)
Na rysunku obok przedstawiono okrąg o środku O i promieniu r. Wyznacz kąt α.



Zadanie 4 (2 pkt)
Oblicz długość okręgu opisanego na trójkącie ABC, jeśli $\sphericalangle ABC = 150^\circ$ oraz $|AC| = 4$.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

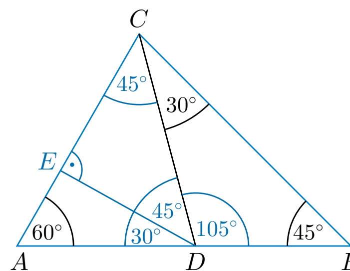
Zadanie 5 (5 pkt)
Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 styczne zewnętrznie (rysunek obok). Okrąg o środku O_2 ma promień $R = 5$ oraz wiadomo, że $|PB| = 12$. Oblicz sinus kąta O_1PA oraz promień r okręgu o środku O_1.



Zadanie 6 (4 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna ma długość 8 cm. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 7 (4 pkt)
Wyznacz miary kątów rombu o boku a i jednej z przekątnych długości $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Zadanie 8 (5 pkt)
Odcinek DC na rysunku obok ma długość $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Oblicz obwód trójkąta ADC.



1. Z warunków zadania mamy:
$\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot \pi r^2 = P$
$\frac{2\alpha}{360^\circ}\cdot \pi(2r)^2 = 8\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi r^2 =$
$= 8P$

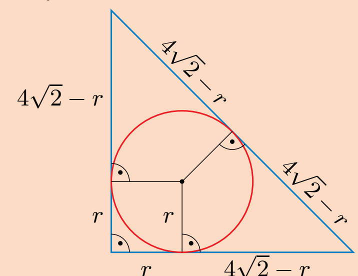
2. $\pi\left(\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 =$
$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4}\pi = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi$

3. Zauważmy, że $\triangle ABC$ jest trójkątem o kątach 30°, 60°, 90°, gdzie $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.
Stąd $\sphericalangle BDC = 30^\circ$.
$\sphericalangle CED = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
$\alpha = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ = 40^\circ$

4. Z twierdzenia sinusów mamy:
$2R = \frac{4}{\sin 150^\circ} = 8$
Zatem $l = 8\pi$.

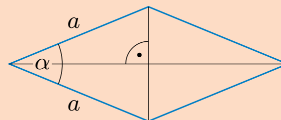
5. $\sphericalangle O_1PA = \sphericalangle O_2PB$
Trójkąt PBO_2 jest prostokątny, więc:
$|PO_2|^2 = |PB|^2 + |BO_2|^2$,
czyli $|PO_2| = 13$.
Zatem $\sin \sphericalangle O_1PA = \frac{5}{13}$.
$|PO_1| = |PO_2| - R - r =$
$= 8 - r$
$\sin \sphericalangle O_1PA = \frac{r}{8-r} = \frac{5}{13}$
Zatem $r = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$.

6. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$4\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 8$, czyli
$r = 4(\sqrt{2}-1)$ cm
Pole koła:
$P = 16\pi(3-2\sqrt{2})\ \text{cm}^2$

7. $(a\sqrt{2-\sqrt{2}})^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha$
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\alpha = 45^\circ$,
$\beta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$



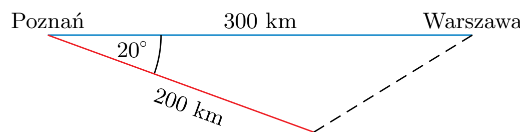
8. $|EC|\sqrt{2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$, czyli $|EC| = \sqrt{3}+1 = |ED|$
$\frac{|AE|}{|ED|} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $|AE| = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}+1) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{|AE|}{|AD|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, czyli $|AD| = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Obwód trójkąta ADC: $Ob = 4 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

Zadanie 1 (2 pkt)
Czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, opisany jest na okręgu o średnicy 3 cm. Niech P będzie polem tego czworokąta wyrażonym w cm^2. Zakoduj trzy początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby P.

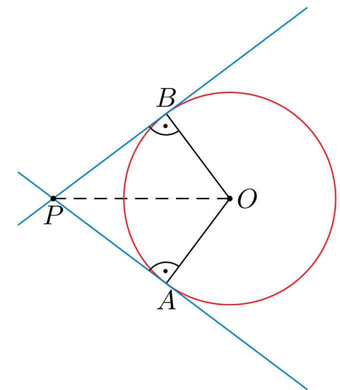
Zadanie 2 (2 pkt)
W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle ABC = 23^\circ$, $\sphericalangle ACB = 64^\circ$ i $|BC| = 800$. Oblicz długość boku AC tego trójkąta i zaokrąglij ją do najbliższej liczby całkowitej. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)
Odległość między Poznaniem a Warszawą jest równa 300 km. Pilot lecący samolotem z Poznania do Warszawy po przebyciu 200 km zorientował się, że pomylił kurs o 20°. W jakiej odległości (w kilometrach) znajdował się wówczas od Warszawy? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.



Zadanie 4 (4 pkt)
Oblicz pole koła wpisanego w trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 18 cm.

Zadanie 5 (5 pkt)
Proste AP i BP są styczne do okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 3$ cm (rysunek obok). Odległość punktu O od punktu P jest równa 5 cm. Oblicz promień okręgu wpisanego w czworokąt $PAOB$.



Zadanie 6 (4 pkt)
Dany jest trójkąt o bokach 6 cm, 5 cm i 4 cm. Oblicz długość środkowej tego trójkąta poprowadzonej do najdłuższego boku.

Zadanie 7 (6 pkt)
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 18$, $|AC| = 15$, $|BC| = 12$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ADC.

1. $P = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 18 =$
$= 13{,}5$ [cm]
Należy zakodować: 135.

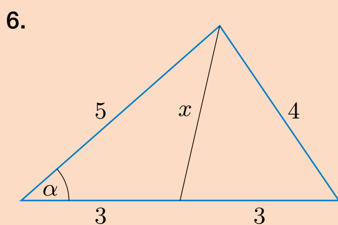
2. $\frac{800}{\sin(180^\circ - 87^\circ)} = \frac{|AC|}{\sin 23^\circ}$
$|AC| = \frac{800 \sin 23^\circ}{\sin(87^\circ)} \approx 313$
Należy zakodować: 313.

3. Z twierdzenia cosinusów:
$x^2 = 200^2 + 300^2 + $
$-2 \cdot 200 \cdot 300 \cos 20^\circ$
$x \approx 131{,}29$ km
Należy zakodować: 131.

4. Ramię trapezu: $c = 13$ cm
Wysokość trapezu: $h = 12$ cm
Pole koła: $P = 36$ cm^2

5. Niech r – promień okręgu wpisanego w czworokąt, l – obwód czworokąta.
$|PB| = |PA| = 4$ cm
$P_{PAOB} = 2P_{POB} = 12$ cm^2
$l = 14$ cm
$P = \frac{1}{2}rl$, czyli $r = \frac{12}{7}$ cm

6.



$\cos\alpha = \frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{3}{4}$
$x^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot5\cdot3\cdot\frac{3}{4} = \frac{46}{4}$
$x = \frac{\sqrt{46}}{2}$ cm

7. Z twierdzenia o dwusiecznej: $\frac{|AD|}{15} = \frac{|BD|}{12}$, ponadto $|AD| + |BD| = 18$. Zatem $|AD| = 10$ i $|BD| = 8$.
Z twierdzenia cosinusów:
dla $\triangle ADC$: $\cos\gamma = \frac{15^2+|CD|^2-10^2}{2\cdot15\cdot|CD|}$
dla $\triangle BDC$: $\cos\gamma = \frac{12^2+|CD|^2-8^2}{2\cdot12\cdot|CD|}$
$\frac{15^2+|CD|^2-10^2}{2\cdot15\cdot|CD|} = \frac{12^2+|CD|^2-8^2}{2\cdot12\cdot|CD|}$
$|CD| = 10$
$\cos\gamma = \frac{3}{4}$, $\sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
Z twierdzenia sinusów: $R = \frac{|AD|}{2\sin\gamma}$, zatem $R = \frac{20}{7}\sqrt{7}$.

